**Классическое и обобщенное решение**

1. Классическим решением $u$ краевой задачи для уравнения $Lu = f$ в области $D$ с краевыми условиями $B_1 u = g_1, \ldots, B_n u = g_n$ на $\partial D$, где $L$ и $B_i$ — дифференциальные операторы, называется вещественнозначная функция на замыкании $\bar{D}$, у которой

1) все производные функции $u$, входящие в $L$, непрерывны на $D$, и уравнение $Lu = f$ является поточечным тождеством на $D$,

2) все производные функции $u$, входящие в операторы $B_i$, непрерывны на $D$ и имеют предел при стремлении к границе $\partial D$, а краевые условия выполняются в смысле предельного перехода.

2. Обобщенное решение $u$ уравнения $Lu = f$ в области $D$ (не краевой задачи!) – обобщенная функция (распределение), для которой уравнение верно в смысле обобщенных функций.

# Вариант 0, задача 2.

$$u_{tt} - \Delta u = 3\sin(2t)\, f(x,y), \quad f \in L^2((0,\pi)^2), \quad (x,y) \in (0,\pi)^2.$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = u_y\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0.$$

Раскладываем по базису в $L^2((0,\pi)^2)$ $\quad e_{km}(x,y) = \sin kx \cos \frac{2m-1}{2} y$, $k, m \geq 1$.

$$u = \sum_{k,m\geq 1} u_{km}(t)\, e_{km}(x,y), \quad f = \sum_{k,m \geq 1} f_{km}\, e_{km}(x,y).$$

Получаем

(1) $\ddot{u}_{km} + \alpha_{km}^2 u_{km} = 3\sin(2t) f_{km}$, где $\alpha_{km} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}$.

Следовательно,

$u_{km}(t) = C_{km}^1 \cos \alpha_{km} t + C_{km}^2 \sin \alpha_{km} t + u_{km}^4(t)$, где

$u_{km}^4(t)$ – частное решение ур-ия (1).

Нетрудно видеть, что $u_{km}^4(t)$ можно выбрать в виде

$$u_{km}^4(t) = \frac{3 f_{km} \sin(2t)}{\alpha_{km}^2 - 4} \quad \left(\text{заметим, что } \alpha_{km}^2 - 4 \neq 0\right).$$

Находим константы $C_{km}^1$, $C_{km}^2$ из начальных условий:

$$C_{km}^1 = 0, \quad C_{km}^2 = -\frac{6 f_{km}}{(\alpha_{km}^2 - 4)\alpha_{km}}.$$

Итого, формальное решение:

$$(2)\quad u(x,y,t) = \sum_{k,m\geq 1} \underbrace{\frac{3 f_{km}}{\alpha_{km}^2-4}\left(-\frac{2}{\alpha_{km}}\sin(\alpha_{km}t)+\sin(2t)\right)}_{u_{km}(t)} e_{km}(x,y).$$

Заметим, что ряд $\sum |u_{km}(t)|^2$ сходится равномерно по $t$, так как

$$(3)\quad |u_{km}(t)| \leq 9|f_{km}| \quad \text{и} \quad \sum_{k,m} |f_{km}|^2 < \infty, \text{ т.к. } f \in L^2.$$

Значит, ряд в (2) сх-ся в $L^2((0,\pi)^2)$ равномерно по $t$.

Следовательно, ряд из (2) определяет решение в смысле обобщенных функций (обобщенное решение).

Эту часть можно не писать столь подробно. Достаточно сказать, что ряд (2) сх-ся в $L^2((0,\pi)^2)$ равномерно по $t$, а отсюда следует почленная дифф-ть в обобщенном смысле.

Докажем это. Согласно материалу из лекций, если ряд $a(z)=\sum_n a_n(z)$, $z \in \mathbb{R}^d$, сходится в $L^2(\mathbb{R}^d)$, то обобщенная производная $\frac{d^k}{dz^k} a(z)$ имеет вид $\sum_n \frac{d^k}{dz^k} a_n(z)$ (ряд можно дифф-ть почленно в смысле обобщ. ф-ций).

Согласно (3), ряд (2) сх-ся в $L^2((0,\pi)^2 \times (0,T))$ $\forall\, T \geq 0$.

$t$

Следовательно, в смысле обобщенных функций на $(x,y,t) \in (0,\pi)^2 \times (0,T)$,

$$\ddot{u}(x,y,t) = \sum_{k,m\geq 1} \ddot{u}_{km}(t)\, e_{km}(x,y), \quad \Delta u(x,y,t) = \sum_{k,m\geq 1} u_{km}(t)\, \Delta e_{km}(x,y)$$

$$= -\sum_{k,m\geq 1} u_{km}(t)\, \alpha_{km}^2\, e_{km}(x,y)$$

Следовательно, по построению

$$\ddot{u}(x,y,t) - \Delta u(x,y,t) = 3\sin(2t) \overbrace{\sum_{k,m\geq 1} f_{km} e_{km}(x,y)}^{f(x,y)}$$