Семинар 14

Задача 1. В условиях задачи 5 семинара 13 рассмотрим кривую $C = v_3(\mathbb{P}^1)$ в $\mathbb{P}^3$. Как мы выяснили в решении этой задачи, общая плоскость в $\mathbb{P}^3$ пересекает кривую C в 3 точках. По этой причине кривая C называется кубикой. Поскольку, как мы также знаем, C является пространственной кривой (т.е. не лежит ни в какой плоскости), то она называется также *пространственной кубикой* или *нормкубикой*. При обсуждении решения задачи 6 семинара 13 мы нашли, что: а) линейный ряд квадрик, проходящих через нормкубику C, имеет размерность 2, т.е. изоморфен $\mathbb{P}^2$ (обозначим эту плоскость через $\mathbb{P}^2_C$), и б) примерами особых квадрик, проходящих через C, являются конуса с уравнениями $x_1^2 - x_0x_2 = 0$ и $x_2^2 - x_1x_3 = 0$.
1) Покажите, что в линейном ряду $\mathbb{P}^2_C$ все особые квадрики являются конусами с вершинами на кривой C и эти конуса как точки в $\mathbb{P}^2_C$ составляют кривую. Найдите степень этой кривой.
2) Проверьте, что каждый конус через нормкривую C имеет вершину $A \in C$ и образован прямыми, проходящими через точку A и все различные точки кривой C.

Задача 2. В условиях задачи 1 возьмем две неособые квадрики Q_1 и Q_2 через нормкубику C. Покажите, что пересечение $Q_1 \cap Q_2$ состоит из нормкубики C и некоторой прямой l. Как расположена прямая l по отношению к нормкубике C?

Задача 3. В проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ дана кривая $X = V(F)$. Рассмотрим отображение $f = f_X : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$, $x = (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (\frac{\partial F}{\partial x_0}(x) : \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) : \frac{\partial F}{\partial x_2}(x))$, где $\check{\mathbb{P}}^2$ - двойственная проективная плоскость. Это отображение называется *полярным отображением, определяемым кривой* $X = V(F)$. Если кривая X неособа, т.е. $\mathrm{Sing}X = \emptyset$, то для любой точки $(x) = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ хотя бы одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$, $i = 0, 1, 2$, не равна нулю, а значит, полярное отображение $f_X : \mathbb{P}^2 \to \check{\mathbb{P}}^2$ регулярно, то есть определено всюду на $\mathbb{P}^2$. При этом кривая $\check{X} = f_X(X)$ называется *кривой, двойственной к кривой* X.
1) Пусть X - гладкая кубика в $\mathbb{P}^2$. Найдите степень двойственной кривой $\check{X}$, пользуясь тем, что, как нам известно из семинара 14, точки кривой $\check{X}$ суть касательные прямые к кривой X (более точно, для $x \in X$ имеем $f_X(x) = \mathbb{T}_x X$, где прямая $\mathbb{T}_x X$ понимается как точка в $\check{\mathbb{P}}^2$).
2) Является ли кривая $\check{X}$ неособой? Для этого полезно проверить, является ли неособой на $\check{X}$ точка $f_X(x)$, где x - точка перегиба на X.

Задача 4. * Пусть дан сизигический пучок кубик $\mathcal{P}$, и пусть $B = \{a_1, ..., a_9\}$ - базисное множество пучка $\mathcal{P}$. Как мы знаем (см. задачи к предыдущим семинарам), для любой гладкой кубики $X \in \mathcal{P}$ и любой точки $a_k \in B$ поляра $P_{a_k}X$ распадается на касательную прямую $\mathbb{T}_{a_k}X$ и прямую $I_k = I_{a_k}$ (гармоническую поляру), не зависящую от кубики X, а зависящую только от точки a_k. Итак, мы получаем множество из 9 прямых $\check{B} := \{I_1, ..., I_9\}$. Рассмотрим его как множество из 9 точек в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$. Является ли $\check{B}$ базисным множеством некоторого сизигического пучка кубик в $\check{\mathbb{P}}^2$?