Представления алгебры уравнения отражений. (REA)

Продолжим рассмотрение представлений алгебры уравнения отражений. На предыдущей лекции мы ввели представление REA в конечномерном пространстве V следующим действием генераторов алгебры:

$$\rho_V(k_i^j) \triangleright e_k = e_i C_k^j, \quad \boxed{\{e_k\}_{1\le k\le N} - \text{базис } V.}$$

Здесь $K = \|k_i^j\|$ удовлетворяет квадратично-линейным перестановочным соотношениям:

$$R_1 K_1 R_1 K_1 - K_1 R_1 K_1 R_1 = R_1 K_1 - K_1 R_1$$

$C_i^j = \sum_a \Psi_{ai}^{aj}$, где Ψ — кососбратная к $GL(N)$ R-матрице:

$$Tr_{(2)} R_{12} \Psi_{23} = P_{13} = Tr_{(2)} \Psi_{12} R_{23}$$

Пример N=2

Для Дринф.-Джимб. R-матрицы

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \qquad \lambda = q - q^{-1}, \quad \|K_i^{\,j}\| = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

алгебра генераторов a, b, c и d имеет вид:

$$q^2 ab - ba = qb \qquad q(bc - cb) = (\lambda a - 1)(d - a)$$

$$q^2 ca - ac = qc \qquad q(cd - dc) = c(\lambda a - 1)$$

$$ad = da \qquad q(db - bd) = (\lambda a - 1)b$$

Матрица $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^3} \end{pmatrix}$.

Двумерное представление вида $\rho_v(K_i^{\,j}) \triangleright e_k = e_i C_k^{\,j}$ задается такими матрицами генераторов a, b, c и d:

$$\rho_v(a) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_v(b) \to \begin{pmatrix} 0 & 1/q^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_v(c) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{q} & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_v(d) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^3} \end{pmatrix}.$$

Видно, что при $q \to 1$ это просто представление алгебры Ли gl_2 матричными единицами из $Mat_2(\mathbb{C})$.

Для генераторов $L_i{}^j = e_{\mathcal{L}} \delta_i{}^j - \lambda K_i{}^j$, которые удовлетворяют <u>однородным</u> квадратичным соотношениям

$$R_1 L_1 K_1 L_1 - L_1 K_1 L_1 K_1 = 0,$$

получается такое представление:

$$\rho_V(L_i{}^j) \triangleright e_k = \delta_i{}^j e_k - \lambda e_i C_k{}^j,$$

или в компактных матричных обозначениях:

$$\boxed{\rho_V(L_1) \triangleright e_2 = \mathbb{1}_1 e_2 - \lambda C_2 P_{12} e_2} \quad (\star)$$

Для практических вычислений удобно переписать формулу $(\star)$ в эквивалентном виде:

$$\boxed{L_1 R_{12} \triangleright e_1 = R_{12}^{-1} e_1} \quad (\star_1)$$

Здесь мы упростили запись

$$\rho_v(L)\triangleright \;\longrightarrow\; L\triangleright$$

(значок $\triangleright$ символизирует действие линейного оператора на вектор).

Тот факт, что (A_1) и (A) – это одно и то же, сразу следует из определения Ψ: умножим обе части (A_1) на Ψ_{23} и возьмём след по второму пространству:

$$Tr_{(2)} L_1 \underline{R_{12}\Psi_{23}} \triangleright e_1 = L_1 P_{13} \triangleright e_1 = \underline{L_1 \triangleright e_3 P_{13}}$$

|| (правая часть (A_1))

$$Tr_{(2)}\left(R^{-1}_{12}\Psi_{23} e_1\right) = \left\{ R^{-1} = R - \lambda \mathbb{1} \text{ — в силу условия Гекке} \right\} =$$

$$= \cancel{Tr_{(2)}}\left(P_{13} - \lambda \mathbb{1}_1 \, Tr_{(2)} \Psi_{23}\right) e_1 =$$

$$= \underline{e_3 P_{13} - \lambda\, C_3\, e_1}$$

Умножив справа на P_{13} получим

Ответ:

$$L_1 \triangleright e_3 = e_3 - \lambda C_3 P_{13} e_3$$

Это только обозначением пространств отличается от ($\cancel{A}$).

Если ($\cancel{A_1}$) умножать <u>слева</u> на R_{12}^{-1} получим ещё одну удобную формулу:

$$\boxed{L_{\underline{2}} \triangleright e_1 = y_2^{-1} e_1} \quad (\cancel{A_2})$$

Напомним, что $L_{\underline{2}} = R_1^{-1} L_1 R_1$, а $\underline{y_2 = R_{12}^2}$ — R-матричное представление элемента Юциса-Мерфи $y_2 = g_1^2$ алгебры Гекке с генераторами $1, g_1, g_2 \ldots$

Получим представление REA в произвольной тензорной степени $V^{\otimes k}$, то есть, нужно задать гомоморфизм REA в $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$:

$$L_i^{\,j} \triangleright e_{a_1} \otimes e_{a_2} \otimes \ldots \otimes e_{a_k} = ?$$

Для этого воспользуемся "твистованной" структурой категории конечномерных представлений REA, описанной в прошлой лекции. А именно, чтобы определить представление REA в тензорном квадрате $V^{\otimes 2}$ необходимо построить композицию отображений:

$\forall\, a \in \mathcal{L}_q(R)$ ($\mathcal{L}_q(R)$ - обозначение для REA)

$$a \otimes \underbrace{u \otimes v}_{\in V^{\otimes 2}} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{L}}} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes u \otimes v \rightarrow$$

$$\xrightarrow{id_{\mathcal{L}} \otimes R_{\mathcal{L}_q, V} \otimes id_V} a_{(1)} \otimes \tilde{u} \otimes \tilde{a}_{(2)} \otimes v \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\rho_V \otimes \rho_V} (a_{(1)} \triangleright \tilde{u}) \otimes (\tilde{a}_{(2)} \triangleright v)$$

Здесь $R_{\mathcal{L}_q, V} : \mathcal{L}_q \otimes V \rightarrow V \otimes \mathcal{L}_q$ — морфизм категории представлений, имеющий следующий вид на генераторах $\mathcal{L}_q$ и базисе V:

$$R_{\mathcal{L}_q, V}(L_{\underline{2}} \otimes e_1) = e_1 \otimes L_2$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ В явных индексных обозначениях:

$$\sum_{\{a,b,c\}} R^{-1\,a_1 a_2}_{i_1 i_2} L_{a_1}^{b_1} R_{b_1 a_2}^{c_1 j_2} \otimes e_{c_1} \longrightarrow e_{i_1} \otimes L_{i_2}^{j_2}$$

Эта форма записи ещё раз иллюстрирует огромное преимущество компактных матричных обозначений.

Итак, для определения представления в $V^{\otimes 2}$ нужно найти действие

$$L_i^j \triangleright e_k \otimes e_s \quad \forall\, i, j, k, s\,;$$

или $L_1 \triangleright e_2 \otimes e_3$ в матричных обозначениях.

Вместо базиса $e_2 \otimes e_3$ удобно брать линейные комбинации:

$$R_{12} R_{23}\, e_1 \otimes e_2$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Умножая справа на 4 и беря следы, можно вернуться к $e_2 \otimes e_3$.

Используем такое выражение для морфизма $R_{\mathcal{L}_q,V}$:

$$R_{\mathcal{L}_q,V}(R_1^{-1}L_1R_1\otimes e_1) = e_1\otimes L_2$$

$$\Updownarrow$$

$$R_{\mathcal{L}_q,V}(L_1R_1\otimes e_1) = R_1e_1\otimes L_2$$

Теперь получаем для $\rho_{V\otimes V}$:

$$L_1\triangleright R_1R_2e_1\otimes e_2 \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{L}_q}} (L_1\otimes \underbrace{L_1)\triangleright R_1e_1}_{\text{применяем } R_{\mathcal{L}_q,V}}\otimes R_2e_2 \to$$

$$= (L_1\triangleright R_1e_1)\otimes(L_2\triangleright R_2e_2) =$$

$$= R_1^{-1}R_2^{-1}e_1\otimes e_2$$

☒ Отображение $\rho_{V\otimes V}:\mathcal{L}_q\to End(V\otimes V)$ вида

$$L_1\triangleright R_1R_2e_1\otimes e_2 = R_1^{-1}R_2^{-1}e_1\otimes e_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L_{\underline{3}}\triangleright e_1\otimes e_2 = y_3^{-1}e_1\otimes e_2} \quad \boxed{\star}$$

Задаёт представление КЕА $\mathcal{L}_q$.

Здесь $L_{\underline{3}} = R_2^{-1}L_{\underline{2}}R_2$, $y_3^{-1} = R_2^{-1}R_1^{-2}R_2^{-1}$.

Док-во:

Перестановочные соотношения

$$R_1 L_1 R_1 L_1 = L_1 R_1 L_1 R_1$$

можно переписать так:

$$R_1 L_{\underline{2}} L_{\underline{1}} = L_{\underline{1}} L_{\underline{2}} R_1 \qquad (*)$$

Здесь $L_{\underline{2}} = R_1^{-1} L_{\underline{1}} R_1$, $L_{\underline{1}} = L_1$

Дальше, как и для $L_{\overline{k}}$, равенство $(*)$ выполнено в $\forall$ старших "копиях" $L_{\underline{k}}$:

$$R_k L_{\underline{k+1}} L_{\underline{k}} = L_{\underline{k}} L_{\underline{k+1}} R_k .$$

Докажем, что действие $L_{\underline{3}} \triangleright e_1 \otimes e_2 =$

$$= y_3^{-1} e_1 \otimes e_2 \quad -$$

-задает представление $RE A$, то есть, $R_3 (L_{\underline{4}} \triangleright)(L_{\underline{3}} \triangleright) = (L_{\underline{4}} \triangleright)(L_{\underline{3}} \triangleright) R_3$

Для этого выпишем вначале действие "копии" $L_{\underline{4}} \triangleright$ на $e_1 \otimes e_2$: (опустим знак $\otimes$)

$$L_{\underline{4}} \triangleright e_1 e_2 = R_3^{-1} L_{\underline{3}} \triangleright R_3 e_1 e_2 = R_3^{-1} (L_{\underline{3}} \triangleright e_1 e_2) R_3 =$$

$$= R_3^{-1} y_3^{-1} R_3 e_1 e_2 .$$

Теперь получаем:

$$R_3(L_{\underline{4}}\triangleright)(L_{\underline{3}}\triangleright)e_1e_2 = R_3(L_{\underline{4}}\triangleright)Y_3^{-1}e_1e_2 =$$

$$= R_3\, Y_3^{-1} L_{\underline{4}}\triangleright e_1 e_2 = R_3 Y_3^{-1}\underbrace{R_3^{-1}Y_3^{-1}}R_3 e_1 e_2$$

$$\hookrightarrow R_3^{-1}Y_3^{-1} = R_3^{-1}Y_3^{-1}R_3^{-1}R_3 = Y_4^{-1}R_3$$

Итог: $R_3 L_{\underline{4}}\triangleright L_{\underline{3}}\triangleright e_1e_2 = \underline{\underline{R_3 Y_3^{-1}Y_4^{-1}R_3^2 e_1e_2}}$

Аналогичным образом

$$(L_{\underline{4}}\triangleright)(L_{\underline{3}}\triangleright)R_3\, e_1e_2 = (L_{\underline{4}}\triangleright)\, Y_3^{-1}R_3\, e_1e_2 =$$

$$= Y_3^{-1}(L_{\underline{4}}\triangleright e_1e_2)R_3 = \underbrace{Y_3^{-1}R_3}\,Y_3^{-1}R_3^2\, e_1e_2 =$$

$$= R_3\,\underline{Y_4^{-1}Y_3^{-1}}\,R_3^2\, e_1e_2 = \underline{\underline{R_3Y_3^{-1}Y_4^{-1}R_3^2 e_1e_2}}$$

Последнее равенство справедливо в силу коммутативности элементов Юциса-Мерфи.

Итак, на $\forall$ базисном векторе простр. $V^{\otimes 2}$ выполнено равенство

$$R_3(L_{\underline{4}}\triangleright)(L_{\underline{3}}\triangleright) - (L_{\underline{4}}\triangleright)(L_{\underline{3}}\triangleright)R_3 = 0 \Rightarrow$$

действие $\boxed{A}$ на стр. =8= задаёт представление REA в $V^{\otimes 2}$.

$\boxed{V}$ Представление REA в $V^{\otimes k}$

задаётся формулой:

$$L_{\underline{k+1}} \triangleright e_1 \otimes \ldots \otimes e_k = Y^{-1}_{k+1}\, e_1 \otimes \ldots \otimes e_k ,$$

где
$$\begin{cases} Y^{-1}_{k+1} = R_k^{-1}\, Y_k^{-1}\, R_k^{-1} & \underline{k \geq 2}. \\ Y_2^{-1} = R_1^{-2} & \\ Y_1^{-1} = \mathbb{1}. & \end{cases}$$

Результат действия $L_1 \triangleright e_2 e_3$ содержит в себе информацию о коумножении ΔL и о морфизме перестановки $R_{\mathcal{L}_q, V}$ на стр. =7=.

Это позволяет "закодировать" теорию представлений в особое "правило Лейбница" для генераторов l_i алгебры уравнения отражений и векторов e_k, которые можно трактовать как независимые свободные образующие алгебры $\mathbb{C}\langle e_1, \ldots, e_N\rangle$ полиномов от некоммутативных переменных.

Очевидно, что $\mathbb{C}\langle e_1, \dots, e_N\rangle \cong T(V)$ тензорная алгебра

пр-ва V и $V^{\otimes k} = \mathrm{Span}($однородные

<u>мономы</u> от $e_1, \dots, e_N$ степени $k)$.

Для формулировки "правила Лейбница" посмотрим на формулу действия $L_1^\triangleright$ на $R_1 R_2 e_1 e_2$ на стр. -8-:

$$L_1 \triangleright R_1 R_2 e_1 \otimes e_2 = \underline{(L_1 \triangleright R_1 e_1)} \otimes (L_2 \triangleright R_2 e_2) =$$

$$= R_1^{-1} e_1 \otimes L_2 \triangleright R_2 e_2$$

Опустим e_2 и получим равенство (операторное):

$$(L_1 \triangleright) R_1 e_1 = R_1^{-1} e_1 L_2^\triangleright$$

или $\boxed{R_1 L_1 R_1 e_1 = e_2 L_2}$

Это и есть искомое правило.

Теперь действие L на произвольный моном $e_1 e_2 \dots e_k$ можно описать так:

$$L_1 \underbrace{e_2 e_3 \dots e_{k+1}} = (\dots) L$$ — проносим

L в самое правое положение и в конце применяем гомоморфизм $\varepsilon(L) = \mathbb{1} \Leftrightarrow L_i^j \triangleright 1 = \delta_i^j$.

То, что останется после "погашения" L на 1 — это и будет действие оператора $L_\triangleright$ в пространстве представления.

Представления REA описанного выше вида в $V^{\otimes n}$ — приводимы.

$\boxed{V}$ Рассмотрим R-матричное представление алгебры Гекке $H_k(q)$ в $V^{\otimes k}$.

$$g_i \to R_i \in End(V^{\otimes k})$$
$$\underline{1 \le i \le k-1}.$$

Примитивные идемпотенты $H_k(q)$, =14= нумеруемые ~~таблицами~~ Юнга, отвечающими всевозможным разбиениям $\lambda \vdash k$ в R-матричном представлении превращаются в ортогональные проекторы $Y^a_\lambda(R_1, \dots, R_{k-1})$:

$$1 \le a \le \#\text{ таблиц } \lambda$$

$$Y^a_\lambda Y^b_\mu = \delta_{\mu\lambda}\delta^{ab} Y^a_\lambda$$

$\boxed{Y}$ Образы этих проекторов в $V^{\otimes k}$ дают инвариантные подпространства представления (A) (см. стр. =11=):

$$V_{\lambda^a} = Y^a_\lambda \triangleright V^{\otimes k}$$

Подпространства V_{λ^a} и V_{λ^b} — (отвечающие разным ~~таблицам~~ одного разбиения λ) — изоморфны как REA-модули, т.е. дают эквивалентные представления.

Доказательство легко следует из того факта, что проекторы Y^a_λ по сути строятся из элементов Юциса – Мерфи: $Y^a_\lambda(y_1,\dots,y_k)$, $\lambda\vdash k$, и все эти элементы

<u>коммутативны</u>:

$$L_{\underline{k+1}} \triangleright V_\lambda^a = L_{\underline{k+1}} \triangleright Y^a_\lambda V^{\otimes k} =$$

$$= Y^a_\lambda L_{\underline{k+1}} \triangleright V^{\otimes k} = Y^a_\lambda\, y^{-1}_{\underline{k+1}} V^{\otimes k}.$$

$L_{\underline{k+1}}$ перестановочно с $\forall R_i$, $1\le i\le k-1$:

$$L_{\underline{k+1}} R_i = R_i L_{\underline{k+1}} \Rightarrow$$

и с $Y_\lambda^a(R_1,\dots,R_{k-1})$ – полином от $R_1,\dots,R_{k-1}$

$$\boxed{Y^a_\lambda\, y^{-1}_{k+1} = y^{-1}_{k+1} Y^a_\lambda}$$

Поэтому $L_{\underline{k+1}} \triangleright V_\lambda^a = \underline{y^{-1}_{k+1} V_\lambda}$

Пример:

$$V^{\otimes 2} = V_{\begin{smallmatrix}\Box\\\Box\end{smallmatrix}} \oplus V_{\Box\Box}$$

$$V_{\Box\Box} = \frac{\left(\frac{1}{q}+R_{12}\right)}{2a}\, V\otimes V$$

$$V_{\begin{smallmatrix}\Box\\\Box\end{smallmatrix}} = \frac{\left(q-R_{12}\right)}{2q}\, V\otimes V$$

$$V^{\otimes 3} = V_{\begin{smallmatrix}\Box\\\Box\\\Box\end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}} \oplus V_{\Box\Box\Box}$$

Формула $L_{\underline{k+1}} \triangleright e_1\ldots e_k = \mathcal{Y}_{k+1}^{-1}\, e_1\ldots e_k$

Удобна для вычисления характеров ~~пред~~ центральных элементов.

Пользуясь формулой

$$Tr_{R(k+1)} R_k^{\pm 1} X_{1\ldots k} R_k^{\mp 1} =$$

$$= \mathbb{1}_k\, Tr_{R(k)} X_{1\ldots k},$$

легко получить, например,

$$Tr_{R(k+1)} L_{\underline{k+1}} = \mathbb{1}_{1\ldots k}\left(Tr_R L\right)$$

Поэтому

$$L_{k+1} \triangleright V^{\otimes k} = y_{k+1}^{-1} V^{\otimes k} =$$

$$= y_{k+1}^{-1} \underbrace{\sum_{\lambda} \sum_{a} Y_{\lambda}^{a}}_{} V^{\otimes k}$$

Умножим слева на конкретный

$$Y_{\mu}^{b}(R_1, \ldots, R_{k-1}) \Rightarrow Y_{\mu}^{b} L_{k+1} = L_{k+1} Y_{\mu}^{b}$$

$$\mu \vdash k$$

и мы получаем

$$L_{k+1} \triangleright V_{\mu b} = \sum_{\lambda a} \underbrace{Y_{\mu}^{b}\, y_{k+1}^{-1}}_{\text{коммутируют}} Y_{\lambda}^{a} V^{\otimes k} =$$

$$= y_{k+1}^{-1} \underbrace{Y_{\mu}^{b} V^{\otimes k}}_{= V_{\mu b}}$$

Берём след по $(k+1)$-му пространству от обеих частей:

$$(\mathrm{Tr}_R L) \triangleright V_{\mu b} = \mathrm{Tr}_{R(k+1)} \left(y_{k+1}^{-1} Y_{\mu}^{b} \right) V^{\otimes k}$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Tr}_{R(k+1)} \left(Y_{\mu}^{b}\, y_{k+1}^{-1} Y_{\mu}^{b} \right)$$

При этом оказывается, что

$$\operatorname{Tr}_{R(k+1)} \mathcal{Y}^{b}_{\mu}\, \mathcal{Y}^{-1}_{k+1}\, \mathcal{Y}^{b}_{\mu} = \alpha(\mu)\, \mathcal{Y}^{b}_{\mu}$$

$\mu \vdash \underline{\underline{k}}$

характер $(\operatorname{Tr}_k L)$ на V_{μ^b}

От таблицы (от числа b) $\alpha(\mu)$ не зависит, как и должно быть в силу эквивалентности REA-модулей V_{μ^a} и V_{μ^b} при разных "b" и одном и том же μ.

Пример для ~~...~~ $V^{\otimes 2}$:

$$L_{\underline{3}} \triangleright V^{\otimes 2} = \mathcal{Y}_3^{-1} V^{\otimes 2}$$

$$V^{\otimes 2} = V_{\boxminus} \oplus V_{\square\square} = (A_{12} + S_{12}) V^{\otimes 2}$$

$$(\operatorname{Tr} L) \triangleright V^{\otimes 2} = \operatorname{Tr}_{R(3)} \left(\mathcal{Y}_3^{-1} A_{12} V^{\otimes 2} + \mathcal{Y}_3^{-1} S_{12} V^{\otimes 2} \right)$$

$$A_{12} = \frac{q - R_{12}}{2q} \qquad S_{12} = \frac{q^{-1} + R_{12}}{2q}$$

$$\mathrm{Tr}_{R(3)}\, Y_3^{-1} A_{12} = \mathrm{Tr}_{R(3)}\, \underbrace{R_{23}^{-1} R_{12}^{-2} R_{23}^{-1}}_{Y_3^{-1}} A_{12} = \quad \{R_2^{-1} = R - \lambda\}$$

$$= \mathrm{Tr}_{R(3)}\, R_2^{-1} R_1^{-2} R_2 A_{12} - \lambda\, \mathrm{Tr}_{R(3)}\, R_{23}^{-1} R_{12}^{-2} A_{12} \overset{*}{=}$$

$$* \quad \left.\begin{array}{l} \mathrm{Tr}_{R(3)}\, R_{23}^{-1} = \dfrac{1}{q^{2N}} 1_2 \\ R_1^{-2} = 1 - \lambda R_1^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{*}{=} \left(\mathrm{Tr}_{R(2)}\, R_{12}^{-2} - \frac{\lambda}{q^{2N}} R_{12}^{-2} \right) A_{12} =$$

$$R_{12}^{-1} A_{12} = -q A_{12}$$

$$= \left(\mathrm{Tr}_{R(2)} \left(1 - \lambda R_{12}^{-1}\right) - \frac{\lambda}{q^{2N}} q^2 \right) A_{12} =$$

$$= \left(\frac{N_q}{q^N} - \frac{\lambda}{q^{2N}} \left(1 + q^2\right) \right) A_{12}$$

$$\boxed{\alpha(\,\Box\!\!\!\!\Box\,) = \frac{N_q}{q^N} - \frac{\lambda q 2_q}{q^{2N}}}$$

Аналогично

$$\mathrm{Tr}_{R(3)}\, Y_3^{-1} S_{12} = \alpha(\Box\Box)\, S_{12}, \quad \boxed{\alpha(\Box\Box) = \frac{N_q}{q^N} - \frac{\lambda 2_q}{q \cdot q^{2N}}}$$

Для квадратично-лимитных генераторов K: $L = \mathbb{1} - \lambda K$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}_R L = \frac{N_a}{q^N}\mathbb{1}_\ell - \lambda \mathrm{Tr}_R K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Tr}_R K) \triangleright V_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} = \frac{2a}{q^{2N-1}} V_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}$$

$$\mathrm{Tr}_R K \triangleright V_{\square\square} = \frac{2a}{q^{2N+1}} V_{\square\square}$$