

## Семинар 15

**Задача 1.** Пусть гладкая кривая  $X$  на вещественной аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2$  задана своими параметрическими уравнениями  $x = p(t)$ ,  $y = q(t)$ , где  $p(t)$  и  $q(t)$  - дважды непрерывно дифференцируемые функции. Рассмотрим полярное отображение  $f : X \rightarrow \check{X} \subset \check{\mathbb{A}}^2$ . Прямым вычислением с производными докажите принцип двойственности, утверждающий, что  $\check{\check{X}} = X$ .

**Задача 2.** Обыкновенным острием на кривой  $X$  называется особая точка  $a \in X$ , в окрестности которой в подходящих аффинных координатах  $(x, y)$  уравнение кривой  $X$  имеет вид

$$y^2 = bx^3 + [4], \quad b \in \mathbf{k}^*, \quad (1)$$

где  $[4]$  означает члены порядка  $\geq 4$  по  $x, y$ . При этом  $l = \{y = 0\}$  - единственная прямая через точку  $a$ , для которой кратность пересечения с  $X$  в точке  $a$  равна 3. Эту прямую назовем *выделенной касательной* к  $X$  в острие  $a$ .

Гладкая точка  $a \in X$  называется *точкой простого перегиба*, если кратность пересечения  $X$  с касательной  $\mathbb{T}_a X$  в точке  $a$  равна 3.

- 1) Докажите, что образ на двойственной кривой  $\check{X}$  точки простого перегиба на  $X$  является обыкновенным острием.
- 2) Докажите обратное утверждение: образ на двойственной кривой  $\check{X}$  обыкновенного острия на кривой  $X$  с уравнением (1) является точкой простого перегиба.

**Задача 3.** Пусть  $X$  - кривая в  $\mathbb{P}^2$ , имеющая обыкновенную двойную точку  $b$ . Как мы знаем, для любой точки  $a \in \mathbb{P}^2$  поляра  $P_a(X)$  проходит через точку  $b$ .

- 1) Докажите, что для общей точки  $a \in \mathbb{P}^2$  кратность пересечения в точке  $b$  кривых  $X$  и  $P_a(X)$  равна 2.
- 2) Пусть  $X$  не имеет других особенностей, кроме  $\delta$  обыкновенных двойных точек. Выведите из утверждения 1), что степень двойственной кривой  $\check{X}$  равна  $\deg \check{X} = d(d-1) - 2\delta$ .

**Задача 4.** Пусть  $X$  не имеет других особенностей, кроме  $\delta$  обыкновенных двойных точек и  $\tau$  обыкновенных острий. Докажите, что степень двойственной кривой  $\check{X}$  равна  $\deg \check{X} = d(d-1) - 2\delta - 3\tau$  (формула Плюккера).

- Задача 5.** 1) Пусть  $a \in X$  - обыкновенная двойная точка. Что ей "соответствует" на двойственной кривой  $\check{X}$ ?
- 2) Пусть  $a \in X$  - обыкновенное острие. Что ему "соответствует" на двойственной кривой  $\check{X}$ ?

**Задача 6.** Дайте геометрическое доказательство принципа двойственности  $\check{\check{X}} = X$ , пользуясь рисунком из pdf-файла семинара 15.