

Экзамен по курсу Введение в римановы поверхности

26 мая 2021 г.

1. Найдите полюсы, их порядки и вычеты в них 1-формы, являющейся поднятием на кривую $y^2 = x^3 - x$ 1-формы dx/x относительно проектирования кривой на ось x .
2. Пусть $p_1, p_2 \in \mathbb{C}P^1$ — различные точки. Опишите векторное пространство $L(2 \cdot p_1 - p_2)$ и найдите его размерность $l(2 \cdot p_1 - p_2)$.
3. Применив теорему Римана–Роха к дивизору $2K$ (“дважды каноническому”), где K — канонический дивизор, найдите размерность пространства голоморфных сечений расслоения $(T^\vee)^{\otimes 2}$ (пространства голоморфных квадратичных дифференциалов) на гладкой кривой рода g . Приведите пример эффективного дивизора степени 4 на кривой рода $g = 2$, не являющегося дважды каноническим.
4. Докажите, что для любой пары различных точек p, q на эллиптической кривой на ней существует мероморфная функция с полюсами первого порядка в этих точках, не имеющая других полюсов. Приведите пример пары различных точек на кривой рода 2, для которых это не так.
5. Докажите, что для любой точки p гладкой алгебраической кривой C на C существует мероморфный дифференциал с полюсом второго порядка в точке p , не имеющий других полюсов.
6. Найдите множество точек Вейерштрасса нормализации плоской кривой $x^4 + xy + y^4 = 0$ и укажите их веса.
7. Укажите все возможные наборы лакун для точек гладких кривых рода а) $g = 3$; б) $g = 4$. Для каждого набора приведите пример кривой и точки на ней с таким набором лакун.