Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Лекция 16. Теорема Римана–Роха: схема доказательства

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Здесь $l(D) = \dim L(D)$ — размерность пространства мероморфных функций на C, дивизор которых не меньше $-D$; $i(D)$ — рамерность пространства мероморфных 1-форм на C, дивизор которых не меньше D.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + i(D).$$

Здесь $l(D) = \dim L(D)$ — размерность пространства мероморфных функций на C, дивизор которых не меньше $-D$; $i(D)$ — рамерность пространства мероморфных 1-форм на C, дивизор которых не меньше D.
Заменив в этом равенстве дивизор D дивизором $K - D$ (K — канонический дивизор), степень которого равна $\deg(K - D) = 2g - 2 - d$, мы можем переписать его в виде

$$l(K - D) = 2g - 2 - d - g + 1 + i(K - D) = g - 1 - d + i(K - D).$$

Пространство мероморфных 1-форм, дивизор которых не меньше $K - D$, изоморфно пространству $L(D)$ мероморфных функций, дивизор которых не меньше $-D$, т.е. $i(K - D) = l(D)$, или, что то же самое, $i(D) = l(K - D)$. Поэтому формулу Римана–Роха можно переписать в виде

$$l(D) = d - g + 1 + l(K - D).$$

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + l(K - D).$$

Theorem (неравенство Римана)

Справедливо неравенство $l(D) \geq d - g + 1$.

Лекция 16. Теорема Римана–Роха: схема доказательства

Theorem

Пусть C — *гладкая алгебраическая кривая рода* g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. *Тогда*

$$l(D) = d - g + 1 + l(K - D).$$

Theorem (неравенство Римана)

Справедливо неравенство $l(D) \geq d - g + 1$.

Доказательство. Пусть C является нормализацией плоской нодальной кривой C', заданной уравнением $F = 0$ степени m, с δ двойными точками $\{p_1, \dots, p_\delta\}$, прообразы которых на C образуют дивизор $\Delta = 1 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{12} + \dots + 1 \cdot p_{\delta 1} + 1 \cdot p_{\delta 2}$.

Theorem

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая рода g, $D \in \mathrm{Div}(C)$, $d = \deg(D)$. Тогда

$$l(D) = d - g + 1 + l(K - D).$$

Theorem (неравенство Римана)

Справедливо неравенство $l(D) \geq d - g + 1$.

Доказательство. Пусть C является нормализацией плоской нодальной кривой C', заданной уравнением $F = 0$ степени m, с δ двойными точками $\{p_1, \dots, p_\delta\}$, прообразы которых на C образуют дивизор $\Delta = 1 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{12} + \dots + 1 \cdot p_{\delta 1} + 1 \cdot p_{\delta 2}$.
$D = D' - D''$ — разность эффективных дивизоров, $d' = \deg D'$, $d'' = \deg D''$.
S^n — пространство многочленов степени n от трех переменных, $\dim S^n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Lemma

При n достаточно большом в S^n есть многочлен G, такой, что а) F не делит G; б) $G \cdot C \geq \Delta + D'$.

Lemma

При n достаточно большом в S^n есть многочлен G, такой, что а) F не делит G; б) $G \cdot C \geq \Delta + D'$.

Lemma

При n достаточно большом в S^n есть многочлен G, такой, что а) F не делит G; б) $G \cdot C \geq \Delta + D'$.

Доказательство. Условие "F делит G" выделяет в S^n алгебраическое подмногообразие положительной коразмерности. Каждое условие вида $G \cdot C \geq k \cdot p, p \in C$ накладывает k линейных ограничений на коэффициенты многочлена G. Поэтому условие $G \cdot C \geq \Delta + D'$ эквивалентно набору из $2\delta + d'$ линейных уравнений на коэффициенты многочлена G. Если n таково, что $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geq 2\delta + d'$, то искомый многочлен G существует. Зафиксируем такое n и такой многочлен G.

Рассмотрим дивизор $E = G \cdot C - D' - \Delta$, $E \geq 0$, $\deg E = mn - d' - 2\delta$. Введем пространство многочленов $S = \{H \in S^n | H \cdot C \geq \Delta + E + D''\}$. Условие $H \cdot C \geq \Delta + E + D''$ эквивалентно набору из

$$\delta + (mn - d' - 2\delta) + d'' = mn - \delta - d' + d'' = mn - \delta - d$$

линейных уравнений. Поэтому $\dim S \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \delta + d - mn$.

Рассмотрим дивизор $E = G \cdot C - D' - \Delta$, $E \geq 0$, $\deg E = mn - d' - 2\delta$. Введем пространство многочленов $S = \{H \in S^n | H \cdot C \geq \Delta + E + D''\}$. Условие $H \cdot C \geq \Delta + E + D''$ эквивалентно набору из

$$\delta + (mn - d' - 2\delta) + d'' = mn - \delta - d' + d'' = mn - \delta - d$$

линейных уравнений. Поэтому $\dim S \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \delta + d - mn$.
Рассмотрим отображение $S \to L(D)$, сопоставляющее многочлену $H \in S$ функцию $\frac{H}{G}\Big|_{C'}$:

$$(f_H) + D = (H \cdot C) - (G \cdot C) + D \geq (\Delta + E + D'') - (E + D' + \Delta) + D = 0.$$

Ядро $F \cdot S^{n-m}$ этого отображения состоит из многочленов, делящихся на F, его размерность равна $(n - m + 1)(n - m + 2)/2$. Поэтому

$$\begin{aligned} l(D) &\geq \dim S - \frac{1}{2}(n - m + 1)(n - m + 2) \\ &\geq \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) + \delta + d - mn - \frac{1}{2}(n - m + 1)(n - m + 2) \\ &= d - \frac{1}{2}m(m - 3) + \delta = d - g + 1. \end{aligned}$$

Lemma

Для эффективного дивизора $D = \sum d_i \cdot p_i, d_i > 0$ *справедливо неравенство*

$$l(D) - l(K - D) \leq d - g + 1.$$

Lemma

Для эффективного дивизора $D = \sum d_i \cdot p_i, d_i > 0$ *справедливо неравенство*

$$l(D) - l(K - D) \leq d - g + 1.$$

Доказательство. Принадлежность к $L(D)$ накладывает на главные части порядков d_i в точках p_i g линейных условий — обращений в нуль вычетов с голоморфными формами. Из этих g линейных условий только $g - L(K - D)$ линейно независимых.

Lemma

Для эффективного дивизора $D = \sum d_i \cdot p_i, d_i > 0$ *справедливо неравенство*

$$l(D) - l(K - D) \leq d - g + 1.$$

Доказательство. Принадлежность к $L(D)$ накладывает на главные части порядков d_i в точках p_i g линейных условий — обращений в нуль вычетов с голоморфными формами. Из этих g линейных условий только $g - L(K - D)$ линейно независимых.
Если $l(D) > 0$, то D эквивалентен эффективному дивизору. Если $l(D) = 0$, то мы можем применить неравенство Римана к дивизору $K - D$.

Лекция 16. Теорема Римана–Роха: схема доказательства

Lemma

Для эффективного дивизора $D = \sum d_i \cdot p_i, d_i > 0$ *справедливо неравенство*

$$l(D) - l(K - D) \leq d - g + 1.$$

Доказательство. Принадлежность к $L(D)$ накладывает на главные части порядков d_i в точках p_i g линейных условий — обращений в нуль вычетов с голоморфными формами. Из этих g линейных условий только $g - L(K - D)$ линейно независимых.
Если $l(D) > 0$, то D эквивалентен эффективному дивизору. Если $l(D) = 0$, то мы можем применить неравенство Римана к дивизору $K - D$.
Обратное неравенство $l(D) - l(K - D) \geq d - g + 1$ получается заменой дивизора D дивизором $K - D$. Теорема Римана–Роха доказана.

Вне рамок курса: якобиан

Вещественная кривая $\gamma : [0,1] \to C$ на комплексной алгебраической кривой C определяет линейный функционал I_γ на g-мерном пространстве голоморфных 1-форм на C: $I_\gamma : \omega \mapsto \int_\gamma \omega$. Этот функционал зависит только от гомотопического класса кривой γ в классе кривых, соединяющих две данные точки $\gamma(0), \gamma(1)$.
Гомотопические классы замкнутых кривых образуют полную решетку в векторном пространстве, двойственном пространству голоморфных 1-форм. Фактор по этой решетке — g-мерный комплексный тор ($2g$-мерный вещественный тор, наделенный структурой g-мерного комплексного многообразия). Он называется *якобианом кривой*.

Вне рамок курса: якобиан

Вещественная кривая $\gamma : [0,1] \to C$ на комплексной алгебраической кривой C определяет линейный функционал I_γ на g-мерном пространстве голоморфных 1-форм на C: $I_\gamma : \omega \mapsto \int_\gamma \omega$. Этот функционал зависит только от гомотопического класса кривой γ в классе кривых, соединяющих две данные точки $\gamma(0), \gamma(1)$.
Гомотопические классы замкнутых кривых образуют полную решетку в векторном пространстве, двойственном пространству голоморфных 1-форм. Фактор по этой решетке — g-мерный комплексный тор ($2g$-мерный вещественный тор, наделенный структурой g-мерного комплексного многообразия). Он называется *якобианом кривой*.

Example

Якобиан эллиптической кривой изоморфен самой этой кривой.

Вне рамок курса: якобиан

Вещественная кривая $\gamma : [0,1] \to C$ на комплексной алгебраической кривой C определяет линейный функционал I_γ на g-мерном пространстве голоморфных 1-форм на C: $I_\gamma : \omega \mapsto \int_\gamma \omega$. Этот функционал зависит только от гомотопического класса кривой γ в классе кривых, соединяющих две данные точки $\gamma(0), \gamma(1)$.
Гомотопические классы замкнутых кривых образуют полную решетку в векторном пространстве, двойственном пространству голоморфных 1-форм. Фактор по этой решетке — g-мерный комплексный тор ($2g$-мерный вещественный тор, наделенный структурой g-мерного комплексного многообразия). Он называется *якобианом кривой*.

Example

Якобиан эллиптической кривой изоморфен самой этой кривой.

Теорема Торелли утверждает, что якобианы различных кривых различны. Не каждый комплексный тор является якобианом какой-либо кривой. Задача выделения якобианов среди торов называется *проблемой Шоттки*. Якобианы кривых несут важную информацию о самих кривых.

Вне рамок курса: гиперболическая геометрия

У каждой комплексной кривой есть универсальное накрытие. Накрывающая кривая представляет собой (вообще говоря, некомпактную), связную односвязную комплексную кривую, и таких кривых (с точностью до изоморфизма) всего три: $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}$ и единичный диск D (или изоморфная ему верхняя полуплоскость $\{z|\Im z > 0\} \subset \mathbb{C}$).

Вне рамок курса: гиперболическая геометрия

У каждой комплексной кривой есть универсальное накрытие. Накрывающая кривая представляет собой (вообще говоря, некомпактную), связную односвязную комплексную кривую, и таких кривых (с точностью до изоморфизма) всего три: $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}$ и единичный диск D (или изоморфная ему верхняя полуплоскость $\{z|\Im z > 0\} \subset \mathbb{C}$).
Проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ накрывает только саму себя. Прямая $\mathbb{C}$ накрывает проективную прямую, проколотую в одной или двух точках, а также все эллиптические кривые. Все кривые, эйлерова характеристика которых отрицательна, накрываются верхней полуплоскостью.

Вне рамок курса: гиперболическая геометрия

У каждой комплексной кривой есть универсальное накрытие. Накрывающая кривая представляет собой (вообще говоря, некомпактную), связную односвязную комплексную кривую, и таких кривых (с точностью до изоморфизма) всего три: $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}$ и единичный диск D (или изоморфная ему верхняя полуплоскость $\{z|\Im z > 0\} \subset \mathbb{C}$).
Проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ накрывает только саму себя. Прямая $\mathbb{C}$ накрывает проективную прямую, проколотую в одной или двух точках, а также все эллиптические кривые. Все кривые, эйлерова характеристика которых отрицательна, накрываются верхней полуплоскостью.
На каждой из трех связных односвязных комплексных кривых имеется однородная метрика постоянной кривизны. На $\mathbb{C}P^1$ эта метрика сферическая, на $\mathbb{C}$ она плоская, на верхней полуплоскости — гиперболическая. Изоморфизмы комплексной структуры сохраняют метрику.

Вне рамок курса: гиперболическая геометрия

Гиперболическая метрика постоянной отрицательной кривизны -1 на верхней полуплоскости задается формулой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, где $z = x + iy$. Фундаментальная группа накрытия действует на универсальной накрывающей изометриями, поэтому на всякой комплексной кривой отрицательной эйлеровой характеристики имеется естественная гиперболическая метрика постоянной отрицательной кривизны -1. Это соответствие взаимно-однозначно.

Вне рамок курса: гиперболическая геометрия

Гиперболическая метрика постоянной отрицательной кривизны -1 на верхней полуплоскости задается формулой $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, где $z = x + iy$. Фундаментальная группа накрытия действует на универсальной накрывающей изометриями, поэтому на всякой комплексной кривой отрицательной эйлеровой характеристики имеется естественная гиперболическая метрика постоянной отрицательной кривизны -1. Это соответствие взаимно-однозначно.

Отождествление комплексных структур с гиперболическими метриками постоянной отрицательной кривизны позволяет рассматривиать на пространствах этих структур различные динамические системы и применять методы теории динамических систем к изучению строения пространств модулей кривых.