1° Преобразование Фурье (справедливы ли аналогии с рядами Фурье)

2° Использование (примеры) преобр. Фурье для PDE.

3° Как посчитать?

Когда = опред. для $L^1(\mathbb{R}^n)$

Хорошая теория для $L^2(\mathbb{T}^n)$

n-мерный тор

$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

Преобр. Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to$
$\to C_b(\mathbb{R}^n)$

$1^\circ)$ $S(\mathbb{R}^n)$ – пр-во Шварца

Доказать: $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$

и на $S(\mathbb{R}^n)$ преобр. $\mathcal{F}$ непр. обратимо

$$\mathcal{F}^{-1}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

$2^\circ)$ $S'(\mathbb{R}^n)$ – обобщенные функции умеренного роста.

(-tempered distributions).

Важные факты

1). $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \underset{\neq}{\supset} S'(\mathbb{R}^n)$

2). $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$

Д-во:

$$\left\{\begin{array}{l} g \in L^p(\mathbb{R}^n) \\ \langle \underset{S(\mathbb{R}^n)}{\underset{\cap}{v}}, g \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x) g(x)\,dx \end{array}\right.$$

Лемма. $\{ P$ - полином. $\Rightarrow P \in S'(\mathbb{R}^n)$

Д-во Лм. $v \in S(\mathbb{R}^n)$ $\quad \langle v, P \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x) P(x)\,dx$

$$Q(x) := \left(1 + |x|^2\right)^{\deg P + n}$$

$$\frac{P}{Q} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \sim \int\limits_0^{+\infty} \frac{\rho^{\deg P}\rho^{n-1}\,d\rho}{(1+\rho^2)^{\deg P + n}} < +\infty$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} v P\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{P}{Q}\cdot Qv\,dx\right| \le$$

$$\le \|P/Q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, \underbrace{\|Qv\|_\infty}_{<+\infty}$$

Непр.-ть $\quad v_k \to v \quad$ в $\; S(\mathbb{R}^n)$.

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} v_k P\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} vP\,dx\right| \le \left|\int_{\mathbb{R}^n} Q(v_k - v)\,\frac{P}{Q}\,dx\right| =$$

$$= \underbrace{\|Q(v_k - v)\|_\infty}_{\to 0}\, \|P/Q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Теперь докажем, что $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f \in S'(\mathbb{R}^n)$

P – полином: $\underbrace{\frac{f}{P} \in L^1(\mathbb{R}^n)}$ $\Rightarrow f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$\frac{1}{P} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ $\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f}{P}\right| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left\|\frac{1}{P}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$

$\left(p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

ч.т.д.

3). $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \not\subset S'(\mathbb{R}^n)$

Пример. $n=1$, $f(x)=e^x$

$f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp} v \subset [a,b]$, $a=0$, $b=1$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $v_k(x) := 2^{-k} v\left(\frac{x}{k}\right)$

$v_k \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0$. $y = \frac{x}{k}$

$$\langle v_k, f\rangle = 2^{-k}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\, v\left(\frac{x}{k}\right)dx = k\,2^{-k}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ky}\, v(y)\,dy$$

$a=0$, $b=1$

$\geq 2^{-k}\, k\, \|v\|_\infty \left(e^k - 1\right) \to +\infty$

$k \to +\infty$.

3°) Подробнее $\mathcal{F}$ на $S'(\mathbb{R}^n)$.

Опред. $f \in S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$:

$\forall v \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\langle v, \hat{f} \rangle := \langle \hat{v}, f \rangle}$$

преобр. в $S(\mathbb{R}^n)$

N.B. $\mathcal{F} : v \in S(\mathbb{R}^n) \longmapsto \hat{v} \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}(v)(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-ik\cdot x} \, dx$$

лин. непр. в $S(\mathbb{R}^n)$

Поэтому

$$\mathcal{F}: f \in S'(\mathbb{R}^n) \longmapsto \hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$$ непр.

непрерывно.

Упражнение: Д-ть, что $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}f = Ff = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx.$$

Th. $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ — линейн., непр., непр. обратимый оператор

$$\langle \underset{S(\mathbb{R}^n)}{\underset{\cap}{v}}, \mathcal{F}^{-1} \underset{S'(\mathbb{R}^n)}{\underset{\cap}{f}} \rangle := \langle \mathcal{F}^{-1} v, f \rangle$$

Д-во: упражнение.

Св-ва преобр. Фурье в $S'(\mathbb{R}^n)$

1°. $f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\widehat{D^\alpha f} = (ik)^\alpha \hat{f}} \quad (1)$$

обобщ. произв.

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс.

$$k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \cdot k_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot k_n^{\alpha_n}$$

Было (1) для $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ только при усл. $\cancel{D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)}$

2°. $$D^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha f}$$

$\hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$

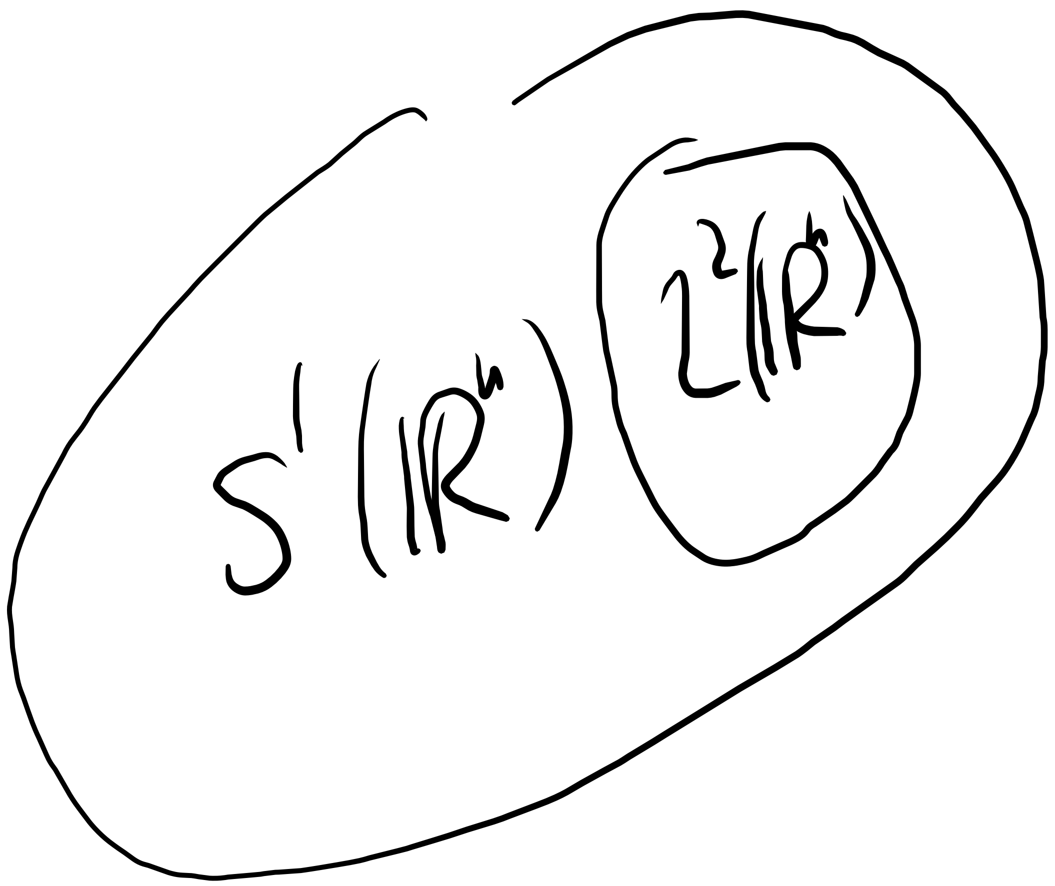
Упражнение (несложная!)

$$(\mathcal{T}_h f)(x) = f(x-h) \qquad \widehat{\mathcal{T}_h f} = e^{-ik\cdot h}\hat{f}$$

$$\boxed{f\in L^1(\mathbb{R}^n)}$$

А как это след-т сформулировать для $f\in S'(\mathbb{R}^n)$?

4°)



В частности $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}f \in S'(\mathbb{R}^n)$

Th (Plancherel). $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} := \mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$

N.B. $\mathcal{F}$ – унитарный.

Более того,

(2) $$\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\, \overline{\hat{v}}\, dx \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(3) $$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

То есть, иными словами, $\mathcal{F}$ изометрия (в частности, непр. обратим.)

Д-во: 1) (2), (3) доказаны $\forall u, v \in S(\mathbb{R}^n)$

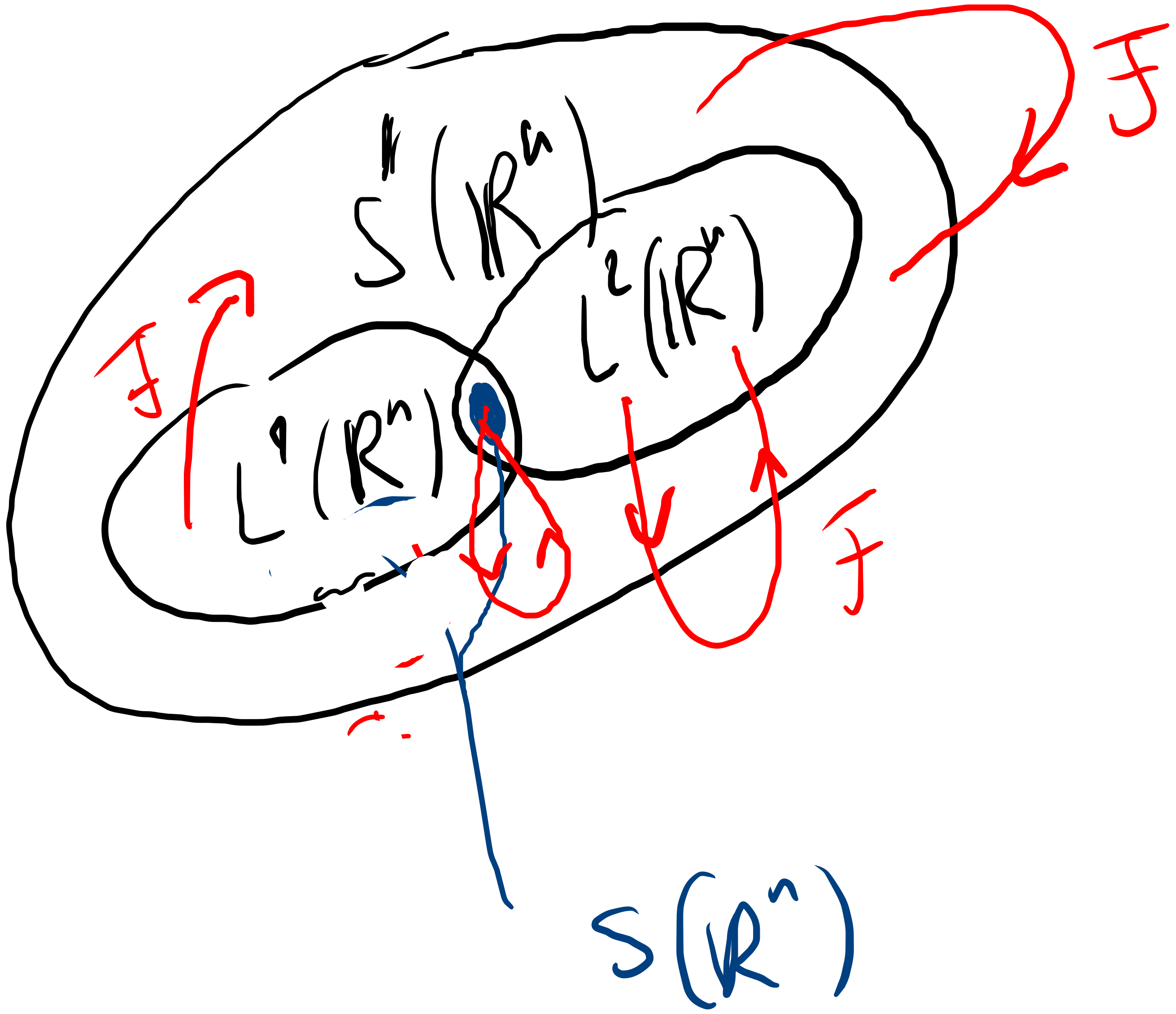
(было предложение про (2), а (3) это (2) с $v = u$).

2). $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u_j \in S(\mathbb{R}^n)$, $v_j \in S(\mathbb{R}^n)$ | $u_j \to u$, $v_j \to v$, $j \to \infty$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\, \overline{\hat{v}} \leftarrow \int_{\mathbb{R}^n} \underset{L^2}{\hat{u}_j}\, \underset{L^2}{\overline{\hat{v}_j}} = \int_{\mathbb{R}^n} \underset{L^2}{u_j}\, \underset{L^2}{\overline{v_j}} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} \Rightarrow (2)$$

Подст. $u = v$ в (2) $\Rightarrow$ (3)



Пример $n = 1$. $\quad f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad \left[f \in L^2(\mathbb{R}) \right]$

$$\hat{f}(k) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ikx}\, dx$$

$$f_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} f. \qquad \hat{f}_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} \hat{f}.$$

$$\cap$$

$$L^2(\mathbb{R})$$

$$f_j(x) := f(x) \cdot 1_{[-j,j]}(x).$$

$$\hat{f}_j(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[-j,j]}(x) f(x) e^{-ikx} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-j}^{j} \frac{\sin x}{x} e^{-ikx} \, dx \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} \hat{f}$$

$$\hat{f}(k) = \lim_{\substack{j\to\infty \\ (L^2(\mathbb{R}))}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-j}^{j} \frac{\sin x}{x}\, e^{-ikx}\, dx =$$

Д/З (или на семинар посчитать).

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-ikx}\, dx = \dots$$

п.в. $k \in \mathbb{R}^n$

?? $\pi\, \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\, \frac{1}{2\pi}\right]}(k)$