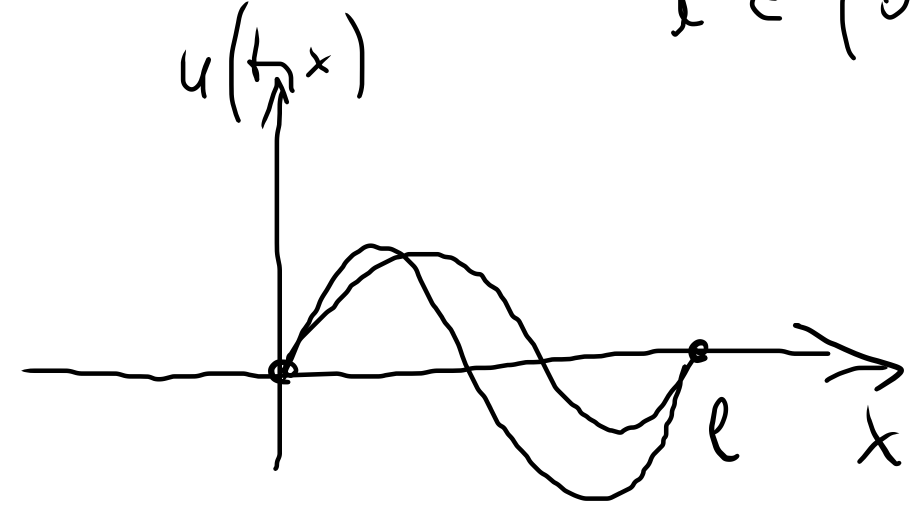
(1) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = v_0(x) \end{cases}$

$u = u(t,x)$

$x \in (0, l)$



$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \underbrace{\sin \frac{k\pi x}{l}}$$

"решение"

(!)

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{c}_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

$$0 = u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ddot{c}_k(t) + a^2 \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} c_k(t) \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$\boxed{\ddot{c}_k(t) + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} c_k(t) = 0}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$u(0,x) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$\| $$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$\boxed{c_k(0) = \alpha_k}$$

$$u_t(0,x) = V_0(x) = \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{k\pi x}{l}}$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(0) \sin\frac{k\pi x}{l}}$$

Иначе говоря, $\boxed{\dot{c}_k(0) = \beta_k}$

<u>Итак</u>: (1) сведена к счетной системе <u>ОДУ</u>

(УрЧП)

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{c}_k + \dfrac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} c_k = 0 \\ c_k(0) = \alpha_k \\ \dot{c}_k(0) = \beta_k. \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Решали (2) и получили $u(t,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$.

Глядя "сверху":

Вели преобразование функции $\longmapsto$ коэфф. ряда (Фурье)

$$f(x) \longmapsto \{d_k\} \qquad d_k \in \mathbb{R}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad f'(x) \overset{(!)}{\longmapsto} \left\{-\frac{k\pi}{l} d_k\right\}$$

Цель – инструмент для решения (краевых задач для) лин. УрЧП

Попутные вопросы:

? 0) Почему в задаче (1) нужен именно ряд по $\sin \frac{k\pi x}{l}$

(а в других задачах ряд по $\sin$, $\cos$, или $J_k(x)$) ?

вопрос о том, в каком классе ищется решение? 2) А почему вообще можно искать решения в виде таких рядов?

Оказывается любая $f \in L^2(0,l)$ представима в виде ряд по sin (и по sin, cos) ...

$$f(x) = \sum_k d_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

, причем "=" в смысле $L^2(0,l)$ (т.е. в смысле среднего квадратич.).

N.B. Вместо $L^2(0,l)$ можно взять любое сепараб. гильбертово пр-во.

3). Представление ф-ций из интересующего нас класса в виде (по sin / по sin, cos / по J_k / ...) единственно?

Да, любая $f \in L^2(\Omega)$ предст. единств. образом.

4) Если f представим в виде ряда Фурье.

(например, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \frac{k\pi x}{l}$.)

Почему (и в каком смысле) можно дифф. сост. ряд почленно?

$$\left(f'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \right)$$

"классическая"

$f \in C^{m+1}$

"обобщенная"

$f \in \mathcal{D}'$

такие решения часто искать намного проще.

Важный факт

в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ т.е. ОЧЕНЬ слабая

$$f = \sum_k u_k \qquad u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \Longrightarrow$$

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow \quad f' = \sum_k u_k'$$

обобщ. производные

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \implies f \in L^2(-\pi,\pi)$$

и сходится в смысле $L^2(-\pi,\pi)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx, \quad f''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} k \sin kx$$

$$f'''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos kx$$

$$\ldots$$

c) NO RECIPE

Искать решения в $\mathcal{D}'$ часто намного проще, чем в C^m, но возникает вопрос о регулярности

Бывает очень сложно.

решение $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow$ это функция? непр.? C^1?

d) Много других обобщений (ослаблений) понятия решения ОДУ

- энтропийное
- ослабленное
- вязкостное
- ⋮

$$\mathcal{F} : f \longmapsto \hat{f}$$

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx$$

интегрируемость ←

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$(n = 1)$: $\quad \boxed{\mathcal{F}(f') = ik(\mathcal{F}f)}$ (!)

Ω - конечн.

$$L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$$

разум. опред. здесь

$\Omega = \mathbb{R}^n$

$$L^2(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$$

опред $\int$?