① Найти $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$x^m u = 0$$

в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(т.е. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle x^m \varphi, u \rangle = 0$)

$m \in \mathbb{N}$

Догадка: $u = A_0 \delta + A_1 \delta' + \ldots + A_{m-1} \delta^{(m-1)}$

Д-во: индукция по m.

База $m = 0$ – тривиально.

Шаг: $m = k$ верно $\Rightarrow$ $m = k+1$ верно

$$x^{k+1} u = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x v = 0, \quad v = x^k u$$

$v = B\delta \Rightarrow \underbrace{x^k u = B\delta} \Rightarrow u =$ частн. реш. $+$ общ. реш. $=$

$(x^k u = B\delta) \qquad (x^k u = 0)$

$$= \underbrace{\tilde{B}}_{A_k}\delta^{(k)} + A_0\delta + A_1\delta' + \ldots + A_{k-1}\delta^{(k+1)},$$ и т.д.

② $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ni \mathcal{P}\frac{1}{x}$

$$\langle \varphi, \mathcal{P}\tfrac{1}{x} \rangle := \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx := \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Д/З проверить что это действительно элемент $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Найти $\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \ xu = 1 \}$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Подсказка $u = \mathcal{P}\frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow xu = 1$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $\quad (*)$

Проверка $(*)$:

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\quad \underbrace{\langle x\varphi, \mathcal{P}\tfrac{1}{x} \rangle} =$

$$= \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cancel{x}\varphi(x)}{\cancel{x}}\, dx = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \underbrace{\langle \varphi, 1 \rangle}, \text{ т.е. } (*).$$

$\varkappa u = 1 \Rightarrow u = P\,{}^1/_x + C\delta$

"Принцип суперпозиции"

$$\mathcal{L} u = v \quad \begin{cases} \mathcal{L}\bar u = v \\ \mathcal{L}\tilde u = 0 \end{cases} \Rightarrow u = \bar u + \tilde u$$

$\mathcal{L}$ — линейная операция.

$\bar u$ — частн. реш. неоднор. ур-я

$\tilde u$ — общее реш. однор.

$$\mathcal{L}(u-\bar u) = \underbrace{\mathcal{L}u}_{=v} - \underbrace{\mathcal{L}\bar u}_{=v} = 0.$$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: $\varkappa(x) = 1$ п.в. $x \in \mathbb{R}$

$u(x) = 1/x$ п.в. на $\mathbb{R}$

но $1/x \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$

В частности, $\mathcal{P}\,1/x$ — не регулярная обобщ. ф-ция

(сингулярная обобщ. ф-ция)

(3) $(x^2-1)u = 0 \qquad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(4) $(x^2-1)u = 1.$

3.0. $(x-1)u = 0$

$u = C\delta_1$

$xu = 0 \Rightarrow u = C\delta$

$\langle \varphi, \delta \rangle := \varphi(0)$

$\langle \varphi, \delta_1 \rangle := \varphi(1)$

Решение 3

$$(x^2-1)u = (x-1)\underbrace{(x+1)u}_{v} = 0$$

$$(x-1)v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = C\delta_1$$

$$(x+1)v = C\delta_1.$$

$$v = \left(\begin{array}{c}\text{частн. реш.}\\ \text{неодн.}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{общ. реш.}\\ (x+1)v=0\end{array}\right) =$$

$$= \left(\frac{C}{2}\delta_1\right) + D\delta_{-1}$$

$$\langle (x+1)\varphi , u \rangle = \langle \varphi , c\delta_1 \rangle = c \langle \varphi , \delta_1 \rangle = $$

$$= c\varphi(1)$$

$$u = \alpha \delta_1 = c/2 \, \delta_1 .$$

$$\langle (x+1)\varphi , u \rangle = \langle (x+1)\varphi , \alpha\delta_1 \rangle = \alpha \langle (x+1)\varphi , \delta_1 \rangle =$$

$$= \alpha \, 2\varphi(1) = 2\alpha\varphi(1) = c\varphi(1)$$

$$\alpha = c/2 .$$

Итого: $u = C\delta_1 + D\delta_{-1}$

(4) Д/З.

Подсказка: подумать про задачу $(x^2-1)u=0$

(5) $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$(\sin x)\, y = 0$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Догадка: $y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_{\pi k}$

Проверим, что это решение:

Д/З

Почему нет других решений?

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle \varphi , \sin x \cdot y \rangle = \langle \varphi \sin x , y \rangle =$$

$$= \langle \varphi \sin x , \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta_{\pi k} \rangle =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(x) \sin x \Big|_{x=\pi k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(\pi k) \cancel{\sin \pi k}^{\,0} = 0$$

Подсказки 1) $\sin x \cdot y = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp} y \subset (-\pi, \pi)$

Тогда $y = C\delta$

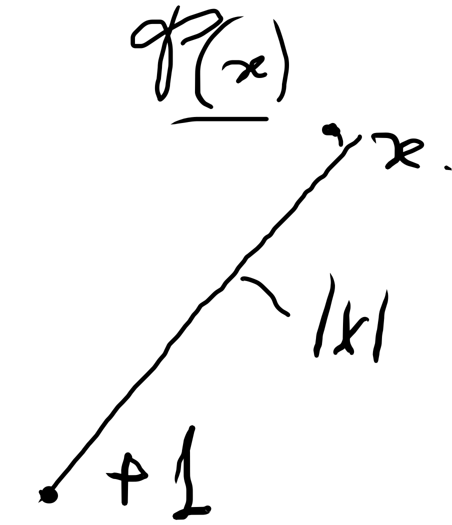
2). $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \subset (-\pi, \pi)$

$\sin x \cdot \psi y = 0. \Rightarrow \psi y = C\delta.$

3). $(-\pi, \pi) \xrightarrow[\text{заменить на}]{} (k\pi - \pi, k\pi + \pi)$.

4) Используй гладкое разбиение единицы.

(6) $\mathcal{E}(x) = \dfrac{1}{4\pi|x|}$, $\quad x \in \mathbb{R}^3$



$$\mathcal{E} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

??

$-\Delta u = f$

$\mathcal{D}$ - Тб, 2То

$$\boxed{-\Delta \mathcal{E} = \delta}$$

Решение: $\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \varphi, -\Delta \mathcal{E} \rangle = -\langle \varphi, \Delta \mathcal{E} \rangle =$$

$$= -\langle \varphi, \Phi_{x_1x_1} + \Phi_{x_2x_2} + \Phi_{x_3x_3} \rangle =$$

$$= -\langle \varphi, \Phi_{x_1x_1} \rangle - \langle \varphi, \Phi_{x_2x_2} \rangle - \langle \varphi, \Phi_{x_3x_3} \rangle$$

$$= -\langle \varphi_{x_1x_1}, \Phi \rangle - \langle \varphi_{x_2x_2}, \Phi \rangle - \langle \varphi_{x_3x_3}, \Phi \rangle$$

$$= -\langle \varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2} + \varphi_{x_3x_3}, \Phi \rangle = -\langle \Delta\varphi, \Phi \rangle =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(x)\,\Phi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(x)\,\frac{1}{4\pi|x|}\,dx =$$

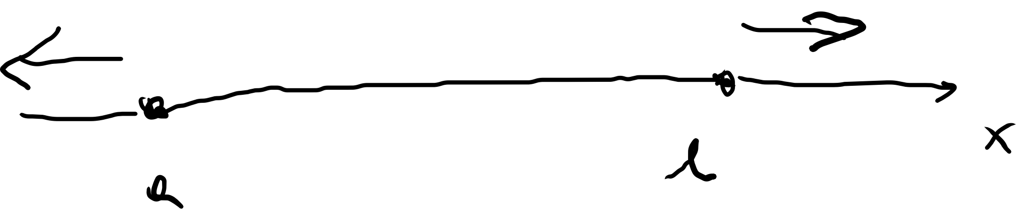
$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta\varphi(x)\cdot\frac{1}{|x|}\,dx = -\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon(0)}\Delta\varphi(x)\cdot\frac{1}{|x|}\,dx$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon(0)}_{\text{по частям}}$$

(!!!)

$$= -\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to0^+} \dots$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + f(x)g(x)\Big|_a^b =$$



$$= -\underbrace{\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}_{} + \underbrace{\big(f(b)g(b) - f(a)g(a)\big)}_{}$$

$$\int_\Omega f(x)\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} f(x)\,g(x)\,\nu_i(x)\,d\sigma(x)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$$

$$\int_\Omega f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i} \nu_i(x)\, d\sigma(x)$$

$$\int_\Omega f \Delta g\, dx = -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx + \int_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x)\, d\sigma(x)$$

$$-\quad \int_\Omega g \Delta f\, dx = -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x)\, d\sigma(x)$$

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu}\right)(x)\, d\sigma(x)$$