1 Семинары 1-2. Ряды Фурье по синусам и косинусам

Задача 1.1. Разложить в ряд Фурье по синусам, косинусам функции $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (продолженные на $\mathbb{R}$ периодически).

1. $$f(t) := \begin{cases} t/2 & t \in (-\pi, \pi), \\ 0 & t = \pm\pi. \end{cases}$$

   Построить график приближений, наблюдать феномен Гиббса.

2. $$f(t) := sign(t),\ (f(0) := 0)\ \text{- прямоугольный волновой профиль}$$

   С помощью этого разложение получить выражение для π в виде числового ряда. Как быстро он сходится?

3. $f(t) := |t|$. Обсудить поточечную и равномерную сходимость полученного ряда.

   Замечание. Числовой ряд из коэффициентов сходится абсолютно. Класс функций с этим свойством называется алгеброй Винера (упражнение - доказать, что это действительно алгебра). Это неслучайно: функция липшицева, а все липшицевы (и даже гельдеровы с показателем 1/2 функции принадлежат алгебре Винера,)

4. $f(t) := t^2$,

5. $f(t) := e^t$,

6. $f(t) := |\sin t|$,

7. $f(t) := \sin \frac{t}{2}$,

8. $f(t) := \cos \alpha t$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Задача 1.2. Найти $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (использовать ряд Фурье для $|t|$ при $t = 0$), а затем с помощью этого ряда найти $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Задача 1.3. Найти $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ (использовать ряд Фурье для t^2 и равенство Парсеваля).

Задача 1.4. $f(t) := \begin{cases} t & t \in [0, \pi] \\ \pi & t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$ - продлить периодически на $\mathbb{R}$

Разложить в ряд Фурье. Получить выражение для $\frac{\pi^2}{8}$.

Задача 1.5. Разложить функцию $f(x) := \cos 2x$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд Фурье только по синусам.

Задача 1.6. Разложить функцию $f(x) := \sin x$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд Фурье только по косинусам.

Задача 1.7. Разложить в ряд Фурье по синусам, косинусам функции $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ (продолженные на $\mathbb{R}$ периодически).

1. $f(t) := |t|$,
2. $f(t) := e^t$.

Задача 1.8. Разложите функцию $sign(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[-1, 2]$.

Задача 1.9. Проверьте, что система e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, является полной ортогональной системой в комплексном гильбертовом пространстве $L^2(-\pi, \pi)$. Разложите по ней функции из задачи 1.1.

Задача 1.10. Как выглядит равенство Парсеваля в комплексном гильбертовом пространстве $L^2(-\pi, \pi)$ относительно системы e^{inx}? Записать его для примеров из предыдущей задачи.

Задача 1.11. Какими свойствами характеризуются коэффициенты c_n комплексного ряда Фурье (относительно системы e^{inx}) на интервале $(-\pi, \pi)$
а) четных, нечетных функций
б) вещественных функций
в) функций, удовлетворяющих свойствам $f(x) = \pm f(2\pi - x)$
г) тригонометрических многочленов

2 Семинары 2-11. Пространства со скалярным произведениям и нормы. Ортогональные системы

О разнице конечномерных пространств и бесконечномерных:

Задача 2.1. Доказать, что в конечномерном линейном векторном пространстве L любые две нормы эквивалентны. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются эквивалентными, если для некоторых чисел $a, b > 0$ выполнены неравенства $a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1$ для для всех $x \in L$.

Задача 2.2. a) Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ две нормы: $\|f\|_C = \max\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$ и $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Доказать, что эти нормы не эквивалентны.
b) Придумать какую-нибудь пару неэквивалентных норм на пространстве $L^2(0,1)$.

Раз уж начали говорить о пространстве непрерывных функций, можно на их примере обсудить вопросы полноты:

Задача 2.3. Будут ли следующие пространства полными (всюду норма - максимум модуля):
а) всех ограниченных непрерывных функций на прямой?
в) всех непрерывных функций на прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого интервала

Напоминание о пространствах L^p:

Задача 2.4. Пусть $p \geq 1$. При каких значениях α следующие функции лежат в $L^p(\mathbb{R})$:
a) $|x|^\alpha$, b) $(1 + |x|)^\alpha$?
А в $L^p(0,1)$? Тот же вопрос для $L^p(\mathbb{R}^2)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$.

Можно чуть-чуть повозиться со скалярным произведением в L^2 перед тем как обсуждать абстрактные результаты:

Задача 2.5. (Кир-Гвиш 545) Найдите углы треугольника, образованного точками $x_1(t) \equiv 0,\ x_2(t) \equiv 1, x_3(t) = t$ в пространстве $L^2(-1, 1)$.

В основном абстрактные результаты на пространства со скалярным произведением:

Задача 2.6. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполняется тождество параллелограмма

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

для всех x, y (в параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин сторон).

Задача 2.7. (Jordan-von Neumann theorem). Пусть для нормы $\|\cdot\|$ в нормированном пространстве выполняется тождество параллелограмма

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

для всех x, y. Доказать, что эта норма порождена скалярным произведением. *Только действительный случай, комплексный будет в листке.*

Задача 2.8. * Пусть для нормы $\|\cdot\|$ в нормированном пространстве выполняется *неравенство*

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

для всех x, y. Доказать, что эта норма порождена скалярным произведением.

Задача 2.9. Проверить, что нормы в пространствах ℓ_1^2 и ℓ_∞^2 не порождены скалярным произведением. Нарисовать единичные шары этих норм.

Задача 2.10. * В (вещественном) гильбертовом пространстве продифференцировать про Фреше норму и квадрат нормы.

Задача 2.11. Доказать неравенство Коши-Буняковского в векторном пространстве V над полем действительных чисел со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$: $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ для любых $x, y \in V$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

Задача 2.12. Доказать *поляризационное тождество* для эрмитового скалярного произведения: в комплексном гильбертовом пространстве H для любых векторов x и y выполнено соотношение

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2).$$

Вывести из него равенство Парсеваля в следующей форме: если $x = \sum_{i=1}^\infty u_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^\infty v_i e_i$ — ряды Фурье для векторов $x, y \in H$ относительно полной ортонормированной системы (e_i), то

$$(x, y) = \sum_{i=1}^\infty v_i \bar{u}_i.$$

Задача 2.13. (*) Доказать, что в комплексном гильбертовом пространстве H для любых векторов x и y выполнены равенства

$$a)\ (x,y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|x+e^{2\pi ik/N}y\|^2 e^{2\pi ik/N}, \quad \text{где } N \geq 3,$$
$$b)\ (x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+e^{i\theta}y\|^2 e^{i\theta}d\theta$$

Задачи, связанные с вычислением расстояний:

Пусть $C \subset H$ – замкнутое выпуклое множество гильбертова пространства H. Расстояние от $u \in H$ до C определяется привычной формулой

$$\operatorname{dist}(u, C) := \inf\{|u-z| : z \in C\}.$$

Задача 2.14. Доказать, что для любого $u \in H$ существует $v \in C$, реализующий расстояние от u до C, то есть

$$|u-v| = \operatorname{dist}(u, C)$$

Задача 2.15. Доказать, что функционал $F(v) := |u-v|$ в пространстве со скалярным произведением строго выпуклый. Привести пример пространства с не строго выпуклой нормой.

Задача 2.16. Доказать, что для любого $u \in H$ элемент $v \in C$, реализующий расстояние от u до выпуклого замкнутого $C \subset H$, то есть

$$|u-v| = \operatorname{dist}(u, C),$$

единственный (он называется проекцией u на C, далее $v := P_C u$).

Задача 2.17. Найти невыпуклое замкнутое множество C в гильбертовом пространстве, в котором нет точки реализующей расстояние (то есть не проксимальное множество).

Задача 2.18. Доказать, что в конечномерном нормированном пространстве любое замкнутое множество (не обязательно выпуклое) проксимально, т.е. имеет точку, реализующую расстояние.

Ортогональность:

Задача 2.19. В пространстве $L^2(-1,1)$ построить ортогональное дополнение для следующих множеств

a) $M = \{x \in L^2(-1,1) :\ x(t) = 0 \text{ для всех } t \leq 0\}$;

b) $M = \{x \in L^2(-1,1) :\ x(t) = x(-t) \text{ для всех } t \in (-1,1)\}$;

Задача 2.20. В пространстве $L^2(0,\pi)$ найти расстояние от вектора $x(t)$ до подпространства H_0, где

a) $x(t) = t^n$, а $H_0 = \{x \in L^2(0,\pi) :\ \int_0^\pi x(t)dt = 0\}$;

b) $x(t) = \sin \pi t$, а $H_0 = \left\{x \in L^2(0,1)\ :\ \int_0^1 tx(t)dt = 0\right\}$.

Задача 2.21. Провести процесс ортогонализации для системы $\{1,\ \sin x,\ \cos x\}$ в пространстве $L^2(0,\pi/2)$. Вычислить расстояние от вектора x до линейной оболочки векторов $\{1,\sin x\}$.

В бесконечномерии бывают незамкнутые линейные пространства:

Задача 2.22. а) Докажите, что любое линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ замкнуто.
б) Придумайте пример замкнутого и незамкнутого линейных подпространств в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$, в $L^2(0,1)$.

Ортогональные дополнения:

Задача 2.23. Пусть M — подмножество гильбертового пространства H. Докажите, что
а) Ортогональное дополнение $M^\perp$ — замкнутое линейное подпространство в H.
б) Если множество M плотно в H, то $M^\perp = \{0\}$. Если M — линейное подпространство в H и $M^\perp = \{0\}$, то M — плотно в H.
в) $(M^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Lin} M}$ (замыкание множества конечных линейных комбинаций векторов из M).
г) Если M — линейное подпространство в H, то $H = \overline{M} \oplus M^\perp$.

Некомпактность шара:

Задача 2.24. а) Показать, что единичный шар в C не компактен.
б) Показать, что единичный шар в ℓ^1 не компактен.
в) Пусть E - замкнутое подпространство линейного нормированного пространства R. Существует вектор $y \in R$ такой что $|y| = 1$ и $|y - x| \geq 1/2$ для всех $x \in E$
г) Теорема Рисса. Единичный шар бесконечномерного нормированного пространства не предкомпактен (и не компактен).

Более подробно про ортогональные системы в L^2:

Задача 2.25. Используя стандартную тригонометрическую систему на $L^2(-\pi,\pi)$, докажите, что следующие системы ортогональны и полны в $L^2(0,\pi)$:
а) $\{\sin kx,\ k \geq 1\}$, б) $\{\cos kx,\ k \geq 0\}$ в) $\{\sin(2k-1)x,\ \cos(2n-1)x,\ k,n \geq 1\}$,
г) $\{\sin\frac{(2k-1)x}{2},\ k \geq 1\}$, д) $\{\cos\frac{(2k-1)x}{2},\ k \geq 1\}$.

Задача 2.26. Разложите функцию $f(x) = 1$ из $L^2(0,\pi)$ в ряд Фурье по системам из пунктов г) и д) предыдущей задачи. Запишите соответствующие равенства Парсеваля.

Задача 2.27. Показать, что в $L^2(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$, есть полные ортогональные системы, состоящие из
а) многочленов,
б) ступенчатых функций (в частности, базис Хаара),
в) тригонометрических многочленов,
г) функций, лежащих в наперед заданном плотном множестве.

Уместно обсудить общую теорему Стоуна-Вейерштрасса: замкнутая подалгебра с единицей непрерывных вещественных функций на компакте K, разделяющая точки, совпадает с $C[K]$. Просто изложена у Шилова

Комплексные гильбертовы пространства:

Задача 2.28. (*) Пусть H - комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y). Рассмотрим его как вещественное векторное пространство H_0 с евклидовой структурой $(x, y)_0 = \Re(x, y)$. Покажите, что

а) H_0 - вещественное гильбертово пространство.

б) Пусть $e_1, ..., e_n, ...$. - полная ортогональная система в H. Постройте полную ортогональную систему в H_0.

Многочлены Лежандра:

Задача 2.29. Определим полиномы Лежандра формулой Родригеса

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

Доказать ортогональность этих полиномов в $L^2(-1, 1)$.

Задача 2.30. Доказать полноту системы полиномов Лежандра в $L^2(-1, 1)$.

Задача 2.31. Доказать, что $y = P_n(x)$ удовлетворяет уравнению Лежандра

$$(1 - x^2)y^{(2)} - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

Базисы в $L^2(X \times Y)$:

Задача 2.32. Доказать, что если $\{\varphi_k\}$ – ортогональная система в $L^2(X, \mu)$, $\{\psi_k\}$ – ортогональная система в $L^2(Y, \nu)$, то $\{\varphi_k \otimes \psi_m\}_{k,m}$ – ортогональная система в $L^2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$, причем она полна, если эти системы полные.

Задача 2.33. Доказать, что $\{\sin kx \sin my\}_{k,m}$ – полная ортогональная система в $L^2((0, \pi)^2)$.

3 Семинары 12-18. Сходимость рядов Фурье

Ядра Дирихле и Фейера:

Задача 3.1. а) Пусть $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ - ортогональная система, порождающая замкнутое подпространство L гильбертова пространства H. Покажите, что отображение $P : H \to H$, заданное формулой

$$P(v) = \sum_k \frac{(v, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k$$

определяет ортогональный проектор из H в $P(H)$. Проверьте, в частности, свойства, $P^2 = P$, $(P(v), u) = (v, P(u))$. Чему равна норма оператора?
б) Пусть $H = L^2(a, b)$. Тогда проектор на L является интегральным оператором с ядром $K(x, y) = \sum_k \frac{e_k(x)\overline{e_k(y)}}{|e_k|^2}$;
в) Вычислите (если не вычисляли еще) ядро Дирихле проекции $L^2(-\pi, \pi)$ на подпространство тригонометрических многочленов степени n (в базисе e^{ikx})

Задача 3.2. Проверьте, что ядро Дирихле $\frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ - непрерывная периодическая функция с интегралом по периоду, равным 1. Объясните происхождение последнего свойства. Нарисуйте примерный график ядра Дирихле при большом n.

Задача 3.3. (*) Пусть D_k - проектор в $L^2(-\pi,\pi)$ на пространство тригонометрических многочленов степени не выше k. Определим оператор F_n по формуле

$$F_n(f) = \frac{D_0(f) + D_1(f) + ... + D_{n-1}(f)}{n}$$

а) Покажите, что F_n - интегральный оператор с ядром Фейера $\frac{\sin^2 n\frac{x}{2}}{2\pi n \sin^2 \frac{x}{2}}$
б) Является ли F_n ортогональным проектором?

Задача 3.4. (*) Проверьте, что ядро Фейера – непрерывная неотрицательная периодическая функция с интегралом по периоду, равным 1. Объясните происхождение последнего свойства. Нарисуйте примерный график ядра Фейера при большом n.

Поведение коэффициентов Фурье и сходимость рядов:

Задача 3.5. Покажите, что коэффициенты Фурье функции $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $p \geq 1$, определяют f однозначно, с точностью до множества меры ноль (т.е. если две функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то они равны почти всюду). В частности, коэффициенты Фурье непрерывной функции определяют ее однозначно.

Здесь уместно сформулировать/обсудить следующие факты (речь, конечно, о периодических функциях на $\mathbb{R}$):

- Существуют непрерывные функции, ряд Фурье которых сходится не во всех точках.
- Если ряд Фурье непрерывной функции f сходится в точке x, то он сходится к $f(x)$ (следует из теоремы Фейера, должно быть на лекциях).
- Теорема Карлесона (1966): ряд Фурье функции $f \in L^2$ сходится к $f(x)$ для почти всех x.
- Коэффициенты Фурье определены не только для функций из L^2, но и для функций из L^p, $p \in [1,\infty]$. Результат, аналогичный теореме Карлесона, верен при $f \in L^p$ для всех $p > 1$ (Хант).
- Существуют функции $f \in L^1$, для которых ряд Фурье расходится всюду (Колмогоров).
- Существует обобщение теоремы Фейера утверждающее, что если $f \in L^1$, то ее суммы Фейера сходятся к f по L^1-норме (такая задача есть в листке 2). Отсюда, в частности, следует, что коэффициенты Фурье функции $f \in L^1$ определяют ее однозначно (с точностью до множества меры ноль).

Задача 3.6. Пусть интегрируемая 2π-периодическая функция f имеет коэффициенты Фурье c_k. Чему равны коэффициенты Фурье функции $f(x-a)$?

Задача 3.7. а) Пусть f — 2π-периодическая, непрерывная, кусочно непрерывно дифференцируемая функция . Покажите, что комплексный ряд Фурье ее производной $f'(x)$ может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье функции f. То есть, коэффициенты Фурье $f'(x)$ имеют вид ikc_k, где c_k— коэффициенты Фурье функции f.
б) Обобщите этот результат на случай высших производных функции f.

Здесь уместно упомянуть, что аналогичный результат верен для ряда по действительной тригонометрической системе. Это относится и к следующим задачам.

Задача 3.8. Докажите, что коэффициенты c_n комплексного ряда Фурье
а) функции из $L^1(a,b)$ стремятся к нулю (лемма Римана-Лебега);
б) периодической функции из $C^k(\mathbb{R})$ т.е., с непрерывными периодическими производными до k-ой, удовлетворяют соотношению $c_n = o(n^{-k})$.

Замечание: на самом деле достаточно требовать, чтобы была $k-1$ непрерывная производная, и $f^{(k-1)}$ была кусочно-дифференцируема.

Задача 3.9. Если $c_n = o(n^{-k-1-\epsilon})$, то c_n — коэффициенты Фурье периодической функции $f \in C^k(\mathbb{R})$, причем ряд Фурье для f сходится к ней равномерно на всей оси.

Задача 3.10. 1. Являются ли следующие ряды рядами Фурье непрерывно дифференцируемых функций?

$$a)\ \sum \frac{\sin nx}{n}; \qquad b)\ \sum \frac{\sin nx}{n^{7/3}}.$$

2. Разложите в ряд Фурье функцию $(\pi - x)/2$ на интервале $[0, 2\pi]$ по стандартной тригонометрической системе.

Равномерная сходимость рядов Фурье:

Задача 3.11. Пусть ряд Фурье непрерывной периодической функции f сходится равномерно. Докажите, что он сходится к $f(x)$ для всех x.

Замечание: вообще-то, равномерность не нужна — как обсуждалось выше, это следует из теоремы Фейера. Однако, если есть равномерность, то результат получается совсем просто "руками".

Задача 3.12. а) Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно непрерывна и ее производная f' (которая определена почти всюду) лежит в $L^2(-\pi,\pi)$. Докажите, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, где c_n – коэффициенты Фурье функции f. Докажите, что ее ряд Фурье сходится к f равномерно на всей оси.
б) Пусть периодическая функция f удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите то же утверждение, что и в предыдущем пункте.

Неравенство Стеклова:

Задача 3.13. Пусть вещественная функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, удовлетворяет соотношению $f(0) = f(\pi) = 0$ и имеет на $(0,\pi)$ производную f', которая принадлежит $L^2(0,\pi)$. Доказать *неравенство Стеклова* (его многомерное обобщение называется *неравенством Фридрихса*):

$$\int_0^\pi (f(x))^2 dx \leq C \int_0^\pi (f'(x))^2 dx,$$

в котором равенство достигается лишь при $f(x) = a \sin x$.

Замечание: предлагается доказать неравенство двумя способами, используя неравенство Гельдера (тогда получится, что существует постоянная C, такая что выполнено утверждаемое неравениство) и используя ряды Фурье (тогда сразу получится $C = 1$).

Доказать изопериметрическое неравенство при помощи рядов Фурье::

Задача 3.14. Пусть кривая на плоскости имеет длину L и ограничивает область площади S. Тогда выполнено соотношение $4\pi S \leq L^2$.

4 Семинары 19-21. Уравнения теплопроводности и волновое уравнение на компакте

Уравнение теплопроводности:

Задача 4.1. Рассмотрим тонкий однородный стержень $[0, 1]$, поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(t, x)$ в момент времени $t > 0$ и точке $x \in (0, 1)$, если начальное распределение температуры задано функцией $u(0, x) = x$, а

а) концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, т.е. $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$;

б) на концах стержня поддерживается начальная температура, т.е. $u(t, 0) = 0$, $u(t, 1) = 1$.

Как ведет себя распределение температуры, когда $t \to \infty$?

Задача 4.2. На отрезке $[0, \pi]$ решить уравнение теплопроводности

$$u'_y = 4u''_{xx} + e^{-2t} \cos 2x, \quad u(0, x) = \cos 3x - 2,$$

при условии, что концы отрезка изолированы т.е.

$$u'_x(t, 0) = u'_x(t, \pi) = 0.$$

Задача 4.3. Описать метод Фурье для неоднородного уравнения теплопроводности, заданного на отрезке $[0, l]$:

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + f(t, x), \quad u(0, x) = \varphi(x),$$

с неоднородными граничными условиями $u(t, 0) = \mu(t)$, $u(t, l) = \nu(t)$.

Задача 4.4. Опишите метод Фурье для краевой задачи уравнения теплопроводности $u'_t = a^2(u''_{xx} + u''_{yy})$ для двумерной прямоугольной пластины $0 < x < l$, $0 < y < m$ с теплоизолированной боковой поверхностью и границей в термостате с нулевой температурой,

$$u(t, x, 0) = u(t, x, m) = u(t, 0, y) = u(t, l, y) = 0, \qquad u(0, x, y) = \varphi(x, y)$$

Задача 4.5. (***) Опишите метод Фурье для краевой задачи уравнения теплопроводности $u'_t = a^2(u''_{xx} + u''_{yy})$ двумерной круглой пластины $x^2 + y^2 < 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью и границей в термостате с нулевой температурой,

$$u(t, x, y)|_{x^2+y^2=1} = 0, \qquad u(0, x, y) = \varphi(x, y)$$

Волновое уравнение:

Задача 4.6. Найдите закон поперечных колебаний струны с закрепленными концами

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \qquad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \qquad u(0, x) = \sin^3 x, \qquad u'_t(0, x) = 1$$

Задача 4.7. Найти закон поперечных колебаний струны длины l со свободными концами,

$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad u'_x(t,0) = u'_x(t,l) = 0; \qquad u(0,x) = x, \qquad u'_t(0,x) = \cos\frac{3\pi x}{l}$$

Задача 4.8. Решите волновое уравнение $u''_{tt} = a^2(u''_{xx} + u''_{yy})$ на квадрате $[0,\pi]\times[0,\pi]$ с граничными условиями

$$u(t,0,y) = u(t,\pi,y) = u'_y(t,x,0) = u'_y(t,x,\pi) = 0$$

и начальными условиями $u(0,x,y) = \sin x \cos 2y$.

Задача 4.9. (*) Найдите закон вынужденных колебаний маятника

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Задача 4.10. (*) Опишите закон вынужденных колебаний изначально покоящейся струны длины π с закрепленными концами,

$$u''_{tt} = u''_{xx} + f(x,t)$$

если

а) $\qquad f(x,t) = \sin x e^{-t}, \qquad$ б) $\qquad f(x,t) = \sin 3x \cos t$

5 Семинары 22-26. Обобщенные функции

Штрихом обозначены наиболее обязательные задачи

Задача 5.1. ' Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Найдите $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Задача 5.2. ' Найдите $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Задача 5.3. ' Найдите $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-x^2/2\varepsilon}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Задача 5.4. ' Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi(0) = 0$. Докажите, что $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Задача 5.5. ' Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $xf(x) = 0$.

Задача 5.6. Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $x^2 f(x) = 0$.

Задача 5.7. Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $xf(x) = 1$.

Задача 5.8. Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $x^m f(x) = 0$.

Определение 1. Обобщенная функция $\mathcal{P}(\frac{1}{x^m})$, $m \geq 1$, определяется действием на пробную функцию $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\left(\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x^m}\Big), \phi\right) = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(0) - x\phi'(0) - \dots - \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\phi^{(m-2)}(0)}{x^m} dx.$$

Задача 5.9. Найдите обобщенную производную от $\mathcal{P}(\frac{1}{x})$.

Задача 5.10. Вычислите $x^2\mathcal{P}(\frac{1}{x^2})$.

Задача 5.11. Докажите, что $x^m \mathcal{P}\left(\frac{1}{x^m}\right) = 1$.

Задача 5.12. Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $x^m f(x) = 1$.

Задача 5.13. Найдите все такие $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $(x^2 - 1)\, f(x) = 1$.

Определение 2. Функционалы $\frac{1}{x\pm i0}$ определим как

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx.$$

Задача 5.14. (Формулы Сохоцкого) Докажите, что $\frac{1}{x\pm i0} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x)$.

Задача 5.15. ' Пусть $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Докажите, что $\Delta f = -4\pi\delta_0$.

Задача 5.16. Вычислите обобщенную производную $\ln|x|$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

6 Преобразование Фурье

Звездочкой обозначены более сложные задачи, кружком — менее обязательные.

Определение. Преобразованием Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ называется функция

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Обратным преобразованием Фурье функции g называется функция

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x}\, dx,$$

так что $\mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-\lambda)$.

Теорема. *Если функция f абсолютно интегрируема и удовлетворяет в точке x_0 условию Дини, то $\mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x_0) = f(x_0)$, где последний интеграл, задающий $\mathcal{F}^{-1}$, нужно понимать в смысле главного значения (то есть как $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}$).*

Задача 6.1. Коэффициенты c_k Фурье функции $f(x) \in L^1(-l, l)$ определяются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(y) e^{-i\frac{\pi k}{l} y} dy, \tag{6.1}$$

а формула обращения в точке x, в которой выполнено условие Дини, выглядит как

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{\pi k}{l} x}, \qquad \text{т.е.} \qquad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(y) e^{i\frac{\pi k}{l}(x-y)} dy. \tag{6.2}$$

Обозначьте $\lambda = \frac{\pi k}{l}$ и $c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{2l} \hat{f}(\lambda)$. Перепишите формулы (6.1)–(6.2) в новых переменных. Формально перейдите к пределу $l \to \infty$, интерпретировав суммы в двух последних равенствах как интегральные суммы. Должно получиться определение преобразования Фурье функции $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ и формула его обращения в комплексной форме.

Замечание. Обратите внимание, что формула обращения сразу появится в смысле главного значения

Вычисление преобразования Фурье и его алгебраические свойства:

Задача 6.2. Вычислить "табличные" преобразования Фурье:

$a)\ \chi_{[-a,a]} \qquad b)\chi_{[0,\infty)} \cdot e^{-ax} \qquad c)\ \chi_{(-\infty,0]} \cdot e^{ax} \qquad d)\ e^{-a|x|} \qquad e)\ e^{-ax^2} \qquad (a > 0)$

ответы: $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ax}{x}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\lambda}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\lambda}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2}a}{\lambda^2 + a^2}, \qquad \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\lambda^2/4a}$

Задача 6.3. Методами ТФКП вычислите преобразование Фурье (интеграл в смысле главного значения) функций

$$a) \frac{1}{x \pm ia}\ (\Re a > 0), \qquad b)\ \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad c)\ \frac{x}{x^2 + a^2}, \qquad d)\ \frac{\sin ax}{x}.$$

ответы: $\quad \mp\sqrt{2\pi}i\chi_{[0,\pm\infty]}e^{\mp a\lambda}, \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a}e^{-a|\lambda|}, \qquad -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}i\,\mathrm{sign}\,\lambda e^{-a|\lambda|}, \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\chi_{[-a,a]}$

Задача 6.4. Выведите алгебраические свойства преобразования Фурье $f(x) \to \hat{f}(\lambda)$:

$a)\ x \to i\frac{d}{d\lambda}, \qquad$ т.е. $\quad g(x) = xf(x) \Rightarrow \hat{g}(\lambda) = i\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda),$

б) $\frac{d}{dx} \to i\lambda,$

в) $\quad g(x) = f(x-a) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\lambda) = e^{-i\lambda a}\hat{f}(\lambda), \quad g(x) = e^{iax}f(x) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda - a);$

г) $\quad g(x) = f(ax) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$

д) преобразование Фурье переводит (не)четные функции в (не)четные.
Какие дополнительные условия на функцию $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ нужно потребовать для выполнения каждого из этих свойств?
е)($^\circ$) сформулируйте аналог пунктов а-в) для многомерного преобразования Фурье.

Задача 6.5. ($^\circ$) Вывести правило преобразования Фурье от $f(x)\cos ax$ и $f(x)\sin ax$. Вычислить преобразование Фурье от $e^{-ax^2}\cos bx$ и от $^{-ax^2}\sin bx$, $a > 0$.

Задача 6.6. Вычислить преобразование Фурье от

$$a) xe^{-ax^2}, \qquad b)\frac{1}{(x^2+1)^2}, \qquad c)\ \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Задача 6.7. а)* Вычислите преобразование Фурье функции e^{-ax^2}, где $a \in \mathbb{C}$, $\Re a > 0$;
б)* распространите полученный результат на чисто мнимые a;
в) вычислите преобразование Фурье функций $\sin ax^2$ и $\cos ax^2$.

Задача 6.8. (*) Вычислите преобразование Фурье функции $\frac{1}{\mathrm{ch}\, ax}$

Задача 6.9. ($^\circ$) Вычислите преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$ от функции $e^{-(Ax,x)}$, где A — вещественная положительно определенная симметричная матрица.

Регулярность:

Задача 6.10. Привести пример функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, для которой $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Задача 6.11. Доказать, что если $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$.

Задача 6.12. Доказать, что если $f \in C^n(\mathbb{R})$ и $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ для всех $0 \le k \le n$, то $|\hat{f}(\lambda)| \le C(1 + |\lambda|^n)$.

Очевидное, в задачах 6.11, 6.12 функции f и $\hat{f}$ можно поменять местами.

Задача 6.13. ($^\circ$) Сформулируйте и решите аналог задач 6.11, 6.12 для функций на $\mathbb{R}^d$.

Задача 6.14. (*) Привести пример функции $g \in C_0(\mathbb{R})$ (т.е. из пространства непрерывных функций, на бесконечности стремящихся к нулю), которая не является преобразованием Фурье никакой функции из $L^1(\mathbb{R})$.

Задача 6.15. ($^\circ$) а) Выразите моменты функции $f(x)$ (т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)$) через коэффициенты Тейлора в нуле ее преобразования Фурье.
б) Пусть $f(x)$ - финитная абсолютно интегрируемая функция. Тогда $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до целой функции комплексного переменного.
в) Пусть $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) < Ce^{ax}$ при $x > 0$. Тогда $\hat{f}(\lambda)$ продолжается до функции, аналитической в полуплоскости $\Im\lambda < -a$.

Свертка:

Определение. Сверткой $f * g$ двух функций называется функция, определенная равенством $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$. Свертка определена и лежит в $L^1(\mathbb{R})$, если обе функции f и g принадлежат $L^1(\mathbb{R})$.

Задача 6.16. Покажите, что при описанных выше условиях преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций.

Задача 6.17. Вычислите свертку:

$$a)\ \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}, \qquad\qquad b)\ e^{-ax^2} * e^{-bx^2}.$$

Задача 6.18. а) Согласуйте результат вычислений предыдущей задачи с теоремой о преобразовании Фурье свертки.
б)($^\circ$) Вычислите свертку функций $e^{-a|x|}$ и $e^{-b|x|}$, разложив в сумму дробь $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

Задача 6.19. ($^\circ$) Сформулируйте и докажите аналог утверждения задачи 6.16 для рядов Фурье.

Пространство Шварца $\mathcal{S}$ и пространство $\mathcal{D}$.

Задача 6.20. (можно устно) а) Покажите, что функции $P(x)e^{-ax^2}$, где $P(x)$ — многочлен от x, $\sin x$, $\cos x$, принадлежат пространству Шварца $\mathcal{S}$.
б) Покажите, что пространства $\mathcal{D}$ финитных бесконечно гладких и $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций плотны в $L^2(\mathbb{R})$.
в) Покажите, что операции умножения на x и дифференцирования переводят пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ в себя.
г) Покажите, что преобразование Фурье переводит пространство $\mathcal{S}$ в пространство $\mathcal{S}$, но не переводит пространство $\mathcal{D}$ в пространство $\mathcal{D}$.

Задача 6.21. ($^\circ$) а) Пусть $f(x) \in \mathcal{S}$. Рассмотрим первообразную $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$. Доказать, что функция $F(x) \in \mathcal{S}$ если и только если $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 0$.
б) Пусть $f(x) \in \mathcal{S}$. Доказать, что функция $\frac{f(x)}{x} \in \mathcal{S}$ если и только если $f(0) = 0$.

Формула Диншереля.

Задача 6.22. (*Формула Планшереля*) а) Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Докажите, что $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

б)($^\circ$) С помощью пункта а) докажите, что преобразование Фурье распространяется на $f \in L^2(\mathbb{R})$. А именно, покажите, что последовательность функций $g^N(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$, $N > 0$, лежит в $L^2(\mathbb{R})$ и имеет в этом пространстве некоторый предел g при $N \to \infty$, причем выполнено соотношение из $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Докажите, что если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $g = \hat{f}$.

Задача 6.23. Вычислите интегралы

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \pi; \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi.$$

воспользовавшись формулой обращения и Планшереля.

Применение преобразования Фурье для решения диффуров.

Задача 6.24. ($^\circ$) а) Проверьте коммутационное соотношение операторов $[\frac{d}{dx}, x] = 1$ б) проверьте, что преобразование Фурье определяет автоморфизм алгебры дифференциальных операторов. Во что переходят при преобразовании Фурье уравнения

$$y' - ay = e^{-x^2}, \qquad xy'' - a^2 y = \chi_{[0,\infty)} e^{-ax}\ ?$$

Задача 6.25. Решить, используя преобразование Фурье задачи Коши с нулевыми начальными условиями [1]:

$$\dot{x} + x = e^{-2t}, \qquad \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^{-3t}$$

Задача 6.26. Решить в пространстве Шварца $\mathcal{S}$ с помощью преобразования Фурье задачу Коши:

а) $u_t = au_x, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$

б) $u_t = tu_x, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$

в) $u_t = 3u_x + 2tu_y, \quad u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$

Задача 6.27. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u'_t = a^2 u''_{xx}, \qquad u(0,x) = e^{-bx^2}.$$

Задача 6.28. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u'_t = a^2 u''_{xx}, \qquad u(0,x) = e^{ix},$$

воспользовавшись соответствующей функцией Грина

Преобразование Фурье обобщенных функций

Определение 3. Пусть f — обобщенная функция из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ее (обобщенным) преобразованием Фурье называется обобщенная функция $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, удовлетворяющая

$$(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi}) \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{6.3}$$

Задача 6.29. Докажите, что если $f \in L^1(\mathbb{R})$ — регулярная обобщенная функция, то ее классическое преобразование Фурье совпадает с обобщенным.

Задача 6.30. Докажите, что свойства а),б),в),г) из задачи 6.4 выполнены и для преобразований Фурье обобщенных функций. Что означают свойства в),г)?

Задача 6.31. Вычислить преобразование Фурье следующих обобщенных функций:

$$a)\ \mathcal{P}\frac{1}{x} \qquad b)\ \delta(x-a), \quad a \geq 0 \qquad c)\ \delta^{(n)}(x-a)$$

$$d)\ e^{iax},\ a \in \mathbb{R} \qquad e)\ \frac{1}{x \pm i0} \qquad f)\ \operatorname{sign} x \qquad g)\ \theta(x)$$

Задача 6.32. Решите следующие уравнения в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, используя преобразование Фурье:

$$a)\ f' + f = \delta(x) \qquad b)\ -f'' + f = i\delta(x)$$

[1] в задаче Коши важны только значения функции при $t > 0$, поэтому правую часть можно умножить на $\chi_{[0,\infty)}$