Идея: ряды Фурье $\longrightarrow$ решение краевых задач для линейных Ур. Ч. П.

преобразование Фурье $\longrightarrow$ решение —//— (например, во всем пр-ве)

Пример: Ур-е теплопроводности / диффузии

$u = u(t, x)$

$t \in \mathbb{R}^+,$

$x \in \underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0. \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

Расам. $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$ и ищем решение $u(t,\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$

$$u \longmapsto \hat{u}, \qquad \hat{u}(t,k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} u(t,x)\,dx.$$

$$\hat{u}_t = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} u_t(t,x)\,dx. = \mathcal{F}(u_t)$$

$$\widehat{\Delta u} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{u_{x_j x_j}} = \sum_{j=1}^{n} (ik_j)^2 \hat{u} =$$

$$= -\hat{u} \sum_{j=1}^{n} k_j^2 = -|k|^2 \hat{u}$$

Итого:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + a^2 |k|^2 \hat{u} = 0. \\ \hat{u}(0,k) = \hat{u}_0(k) \end{cases} \qquad \hat{u} = \hat{u}(t,k)$$

$$\boxed{\hat{u}(t,k) = \hat{u}_0(k)\, e^{-a^2 |k|^2 t}}$$

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}(t,\cdot)\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\, \hat{u}(t,k)\, dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\, e^{-a^2|k|^2 t}\, \hat{u}_0(k)\, dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x - a^2|k|^2 t}\, dk \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\, e^{-ik\cdot y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\, dy \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot(x-y) - a^2|k|^2 t}\, dk \right)}_{G(t,\, x-y)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\, G(t, x-y)\, dy$$

ядро теплопроводн.

$$G(t, z) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot z - a^2 |k|^2 t}\, dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} dk_1 \int_{\mathbb{R}} dk_2 \dots \int_{\mathbb{R}} dk_n \prod_{j=1}^{n} e^{ik_j z_j - a^2 k_j^2 t} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i k_j \xi_j - a^2 k_j^2 t}\, dk_j = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{n/2}} e^{-|\xi|^2/4a^2 t}$$

Дос. посчитать $I(t,\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i k \xi - a^2 k^2 t}\, dk =$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 k^2 t} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} e^{-\xi^2/4a^2 t}$$

$$G(t,z) = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{n/2}}\, e^{-|z|^2/4a^2 t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\, G(t, x-y)\, dy = \\ &= \frac{1}{(4a^2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4a^2 t}\, u_0(y)\, dy \end{aligned}} \tag{1}$$

I $u_0 \in S(\mathbb{R}^n) \implies \hat{u}(t,\cdot) \in S(\mathbb{R}^n) \implies u(t,\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$

II Оказывается, формула (1) верна, даже если $u_0 \notin S(\mathbb{R}^n)$

Теорема

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4a^2 t}\, u_0(y)\, dy$$

$G(t, x-y)$

определяет классич. решение ур-я

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0. \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases},$$

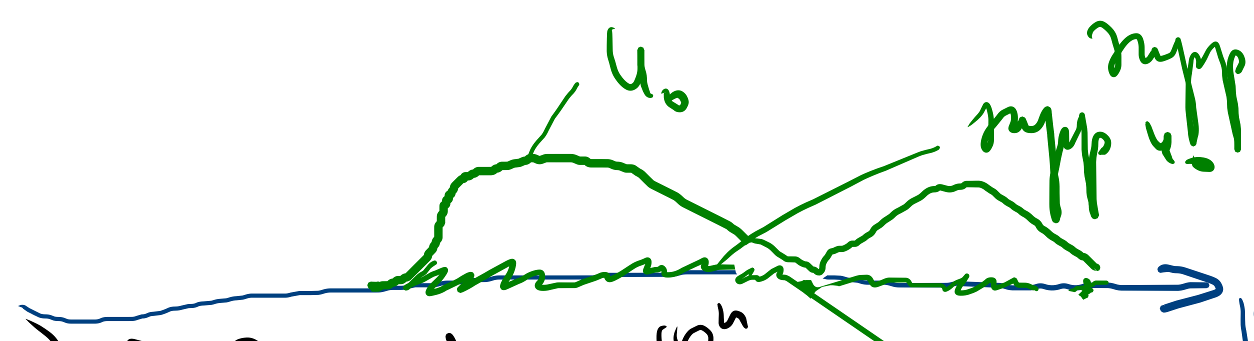
если $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$

непрерывн. и огранич.

Remark. 1°) $G = G(t,z)$ $\quad G \in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$.

Мгновенное бесконечн. сглаживание.

2°)



$u(t,x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t>0.$

Ф-ка ур-я теплопроводности

Мгновенное бесконечное распространение

Неединств. решений: пример Тихонова.

Д-во теоремы. Проверяем: $\cdot)\ G \in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$

$\cdot)\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G(t,z)\,dz = 1.$

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-y)\,u_0(y)\,dy.$$

$$u_t(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(t,x-y)\,u_0(y)\,dy$$

$$u_{x_j x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} G_{x_j x_j}(t,x-y)\,u_0(y)\,dy \qquad 0$$

$$u_t - a^2\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n}\left(G_t(t,z) - a^2\Delta_z G(t,z)\Big|_{z=(x-y)}\right)u_0(y)\,dy = 0,$$

Проверяем: $G_t(t,z) - a^2\Delta_z G(t,z) = 0 \quad \forall t>0$
$\forall z\in\mathbb{R}^n.$

Т.е. u — классич. решение ур-я теплопроводности

Осталось проверить $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ x\to z}} u(t,x) = u_0(z)$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-y)\,u_0(y)\,dy$$

$$u(t,x)-u_0(z) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-y)\,u_0(y)\,dy - u_0(z)\cancel{\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-y)\,dy}^{=1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-y)\big(u_0(y)-u_0(z)\big)\,dy$$

Выберем $\varepsilon>0$

$$|u(t,x)-u_0(z)| \le \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-y)\overbrace{|u_0(y)-u_0(z)|}^{\le\varepsilon}\,dy =$$

$$= \int_{\{y:|y-z|<\delta\}} (\text{—''—}) + \int_{\{y:|y-z|\ge\delta\}} (\text{—''—}) \le \varepsilon\cancel{\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x-y)\,dy}^{1} +$$

$$+ 2C\int_{\{y:|y-z|\ge\delta\}} G(t,x-y)\,dy =$$

$|u_0(y)|\le C$

$$= \varepsilon + 2C\int_{|y-z|\ge\delta} G(t,x-y)\,dy$$

$|x-z|<\delta/2$, $|y-z|\ge\delta \Rightarrow |y-x|\ge \delta/2$

$$|u(t,x)-u_0(z)| \le \varepsilon + 2C\int_{|y-x|\ge\delta/2} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|\overset{z}{x-y}|^2}{4a^2t}}\,dy =$$

$$= \varepsilon + \frac{2C}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\int_{|z|\ge\delta/2} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}}\,dz = \varepsilon + \frac{2\tilde{C}}{(4a^2t)^{n/2}}\int_{\delta/2}^{+\infty} e^{-s^2/4a^2t}\, s^{n-1}\,ds$$

$$= \varepsilon + \tilde{\tilde{C}}\int_{\delta/2a\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma \le 2\varepsilon,$$

$\sigma = \delta/2a\sqrt{t}$

$\delta/2a\sqrt{t} \to +\infty$, $\int \to 0$, $\le\varepsilon$

если $\begin{cases} |x-z|<\delta/2 \\ t<\tilde{\delta}, \end{cases}$

То есть $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ x\to z}} u(t,z) = u_0(x)$, ч.т.д.