ТОПОЛОГИЯ - ЛИЦЕНЦИАТ

Вопрос 19

X — мн-во, $\tau \subset 2^X$

Опр τ - топология на $X \Longleftrightarrow$

(1) $\emptyset \in \tau$; $X \in \tau$;

(2) $\{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \in \tau \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

(3) $U_1, \ldots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

(X, τ) - топологич. пр-во

мн-ва из τ наз. открытыми

Опр (X, τ) - топ. пр-во

$F \subset X$ замкнуто $\Longleftrightarrow X \setminus F$ откр.

Опр. Замыкание мн-ва $A \subset X$ - это

$$\bar{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ замкн}, F \supset A\}$$

Внутренность мн-ва $A \subset X$ - это

$$\operatorname{Int} A = \bigcup \{U \subset X : U \text{ откр}, U \subset A\}$$

$$\boxed{\operatorname{Int} A \subset A \subset \bar{A}}$$

Набл. $\operatorname{Int} A = X \setminus (\overline{X \setminus A})$; $\bar{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$

<u>Набл</u> $\overline{A}$ – наим. замкн. мн-во, сод-щее A.

$\mathrm{Int}A$ – наиб. открытое мн-во, сод-щееся в A.

<u>Опр.</u> <u>Граница</u> A – это $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}A$.

<u>Предл. 19.1</u>

(1) $x \in \mathrm{Int}A \iff \exists$ окр-ть $U \ni x$, $U \subset A$.

<u>Опр.</u> <u>Окр-ть</u> точки $x \in X$ – $\forall$ откр $U \subset X$, т.ч. $U \ni x$.

(2) $x \in \overline{A} \iff \forall$ окр $U \ni x$ $U \cap A \neq \varnothing$.

(3) $x \in \partial A \iff \forall$ окр $U \ni x$ $U \cap A \neq \varnothing$, $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

X, Y – топ. пр-ва, $f: X \to Y$.

<u>Опр.</u> f <u>непр-но в $x \in X$</u> $\iff \forall$ окр $V \ni f(x)$ $\exists$ окр $U \ni x$ т.ч. $f(U) \subset V$.

<u>Т-ма</u> 19.2 След. св-ва отобр. $f: X \to Y$ экв:

(1) f непр. в каждой $x \in X$;

(2) $\forall$ откр. $V \subset Y$ $f^{-1}(V)$ откр. в X.

(3) $\forall$ замк. $B \subset Y$ $f^{-1}(B)$ замк в X.

(4) $\forall A \subset X$ $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Опр f непр-но $\iff$ f удовл любому из этих усл-ий (а значит, и всем).

X - мн-во.

Опр. Метрика на X - ф-ция
$\rho: X \times X \to [0, +\infty)$, т.ч:

(1) $\rho(x,x) = 0 \quad \forall x \in X$;

(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x, y \in X$;

(3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$;

(4) $\rho(x,y) > 0 \quad \forall x \neq y$.

(X, ρ) - метрическое пр-во.

Опр. (X, ρ) - метр. пр-во; $x \in X$; $r > 0$.
$B_r(x) = \{ y \in X : \rho(y,x) < r \}$ - (метрически) открытый шар с центром в x радиуса r.

Опр $A \subset X$, $x \in A$.
x - метрически внутренняя точка A $\iff$
$\iff \exists\, r > 0$ т.ч. $B_r(x) \subset A$.

$U \subset X$ метрически открыто $\iff$ все его точки — метрич. внутренние.

Предл 19.3. Сем-во всех метрич. откр. подмн-в метрич. пр-ва X явл-ся топ-ей на X.

Прим. $\mathbb{R}$ - метр. пр-во:

$$\rho(x,y) = |x-y|.$$

Прим. $\mathbb{R}^n$ Три метрики:

$$\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\rho_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2} \text{ – евкл. метрика.}$$

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

Предл. 19.4. $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ порождают одну и ту же топол. на $\mathbb{R}^n$.

Прим. X - $\forall$ мн-во.

дискр. метрика на X: $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x\ne y \\ 0, & x = y. \end{cases}$

В топ-ии, порождённой такой метрикой, открыты <u>все</u> мн-ва. (дискр. топ-ия)

Прим. Равном. метрика на $C[a,b]$:

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|.$$

Прим. Антидискр. топ-ия на $\forall$ мн-ве X:

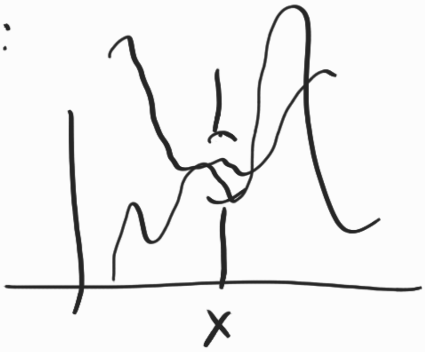
$$\tau = \{\varnothing, X\}.$$

Прим. $X = C[a,b]$.

Топология поточечной сход-ти:

$I \subset \mathbb{R}$ - инт-л; $x \in [a,b]$

$G(x, I) = \{ f \in X : f(x) \in I \}$



$U \in \tau \iff U$ - объед-ие

конеч. пересеч-ий мн-в вида $G(x, I)$

τ - топ-ия поточеч. сх-ти.

Она неметризуема. (но хаусд.)

Предл. 19.5 $U \subset \mathbb{R}$ открыто $\iff$

$\iff U$ - дизъюнкт. объед-ием не более

чем счёт семейства открытых промеж-ков.

Вопрос 20.

X – топол. пр-во

$\mathcal{U}$ – сем-во подмн-в X.

Опр. $\mathcal{U}$ – <u>покрытие</u> X $\Longleftrightarrow$ $\bigcup \mathcal{U} = X$.

$$\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \{V : V \in \mathcal{U}\}$$

Покрытие $\mathcal{U}$ – <u>открытое покрытие</u> $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ все мн-ва из $\mathcal{U}$ открыты.

Опр. X <u>компактно</u> $\Longleftrightarrow$ каждое его откр. покрытие имеет конечное подпокрытие.

Т-ма 20.1.

(1) $f: X \to Y$ непр, X комп. $\Rightarrow f(X)$ комп

> X – топ. пр-во, $Z \subset X$.
> $V \subset Z$ <u>открыто в Z</u> $\Longleftrightarrow$ $\exists$ откр $U \subset X$
> т.ч. $V = U \cap Z$

(2) X комп, $Y \subset X$ замк. $\Rightarrow Y$ комп.

(3) X хаусдорфово, $Y \subset X$ комп. $\Rightarrow Y$ замк. в X.

> X <u>хаусдорфово</u> $\overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, x, y \in X$,
> т.ч. $x \neq y$, $\exists$ окр. $U \ni x$, $V \ni y$, $U \cap V = \varnothing$

(4) X комп, Y хаусд, $f: X \to Y$ непр
$\Rightarrow f$ замкнуто (т.е. $\forall$ замк. $B \subset X$
$f(B)$ замк. в Y)

(5) X комп, Y хаусд, $f: X \to Y$ – непр.
биекция $\Rightarrow f$ – гомеоморфизм
(т.е. f^{-1} непр.)

<u>Т-ма 20.2.</u> $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X$ замкнуто и ограничено.

Вопрос 21.

Опр. X – топ. пр-во.
X связно $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ непустых откр $U, V \subset X$ т.ч. $U \cap V = \varnothing$ и $X = U \cup V$

Т-ма 21.1

(1) $f: X \to Y$ непр, X связное $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(X)$ связное.

(2) (A_i) - сем-во связ. подмн-в X, имеющих общ точку $\Rightarrow \bigcup A_i$ связно.

(3) Пусть $\forall x, y \in X$ $\exists$ связ. $A \subset X$, т.ч. $x, y \in A$
$\Rightarrow X$ связно.

(4) $A \subset X$ связное $\Rightarrow \bar{A}$ связное.

(5) X, Y - связные пр-ва $\Rightarrow X \times Y$ связно.

Т-ма 21.2 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связен.

Опр. X – топ. пр-во, $x, y \in X$.
Путь в X из x в y – непр. $f: [0,1] \to X$
т.ч. $f(0) = x$, $f(1) = y$.

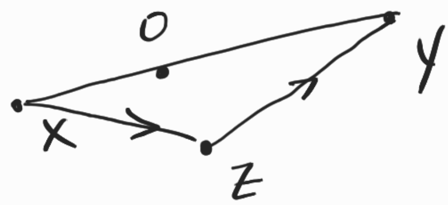
Опр. X линейно связно $\iff \forall x, y \in X$ $\exists$ путь из x в y.

Прим. (1) Выпуклое подмн. в $\mathbb{R}^n$.

$$f(t) = (1-t)x + ty \text{ - путь из } x \text{ в } y$$

Предл. 21.3. X лин. связ., $f: X \to Y$ непр $\Rightarrow f(X)$ лин. связно.

Прим. (2) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ лин. связно $(n \geq 2)$.

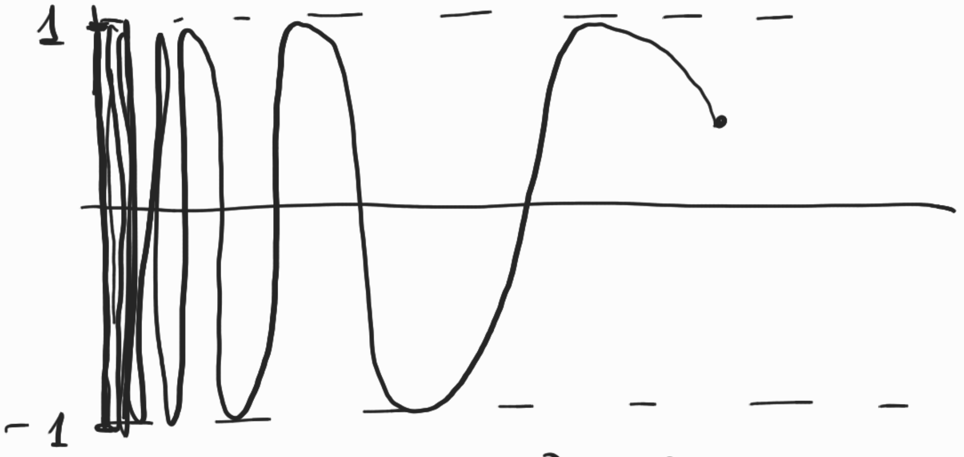


(3) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ лин. связна:

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n, \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

Предл. 21.4. X лин. связно $\Rightarrow X$ связно.

Прим. (связное, не лин. связ. пр-во).



$$X = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : 0 < x \le 1 \right\} \cup \underbrace{\{(0,y) : -1 \le y \le 1\}}_{I}$$

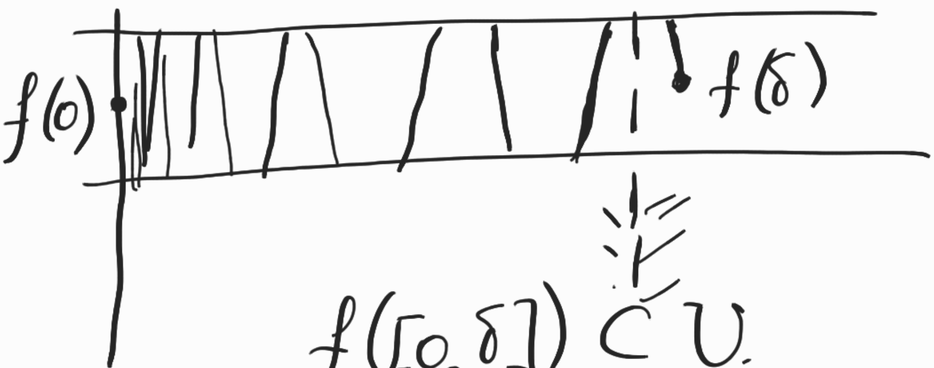
— связно, но не лин. связно.

① $f : [0,1] \to X$ $\quad f(0) \in I,\ f(t) \notin I\ \forall t > 0$

(иначе $t_0 = \sup\{t : f(t) \in I\}$)

$[t_0, 1]$

②



$U = \mathbb{R} \times V$

$1 \notin V$

либо $-1 \notin V$

$f([0,\delta]) \subset U.$

Вопрос 22.

Опр. (X,ρ) - метр. пр-во.
Посл-ть (x_n) в X <u>фундаментальна</u>
(<u>посл-ть Коши</u>) $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m>N$
$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

Предл 22.1 Сходящаяся п-ть фунд-на.

Опр. X <u>полно</u> $\Longleftrightarrow$ каждая фунд. п-ть в X сходится.

Прим. $\mathbb{R}$ (со станд. метрикой) полно.

Предл. 22.2 (1) X - полное метр. пр-во,
$Y\subset X$ замк $\Rightarrow$ Y полно.
(2) X - метр. пр-во, $Y\subset X$ полно $\Rightarrow$ Y замк. в X.

Предл. 22.3 X, Y - полные метр. пр-ва.

$$\rho_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\rho(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2)$$
$$\rho_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=(\rho(x_1,x_2)^2+\rho(y_1,y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\rho_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{\rho(x_1,x_2),\rho(y_1,y_2)\}$$

$\Rightarrow X\times Y$ полно в $\forall$ из этих метрик.

Сл-вие $\mathbb{R}^n$ с евкл. метрикой полно.

X — мн-во. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

<u>Обозн.</u> $\ell^\infty(X) = \{$ограниченные ф-ции $X \to \mathbb{K}\}$

$\rho(f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ — равном. метрика на $\ell^\infty(X)$

<u>Т-ма 22.4.</u> $\ell^\infty(X)$ полно.

X — топол. пр-во.

<u>Обозн.</u> $C_b(X) = \{$непрер. огр. ф-ции $X \to \mathbb{K}\}$

<u>Т-ма 22.5.</u> $C_b(X)$ замк. в $\ell^\infty(X)$.

<u>Сл-вие.</u> $C_b(X)$ полно.

В част-ти, $C[a,b]$ полно (в равн метрике).

Пусть X — метр. пр-во, $f : X \to X$.

<u>Опр.</u> f — <u>сжимающее</u> $\iff \exists\, q \in (0,1)$ т.ч. $\forall x, y \in X \quad \rho(f(x), f(y)) \le q\rho(x,y)$.

<u>Т-ма 22.6.</u> X — полное метрич. пр-во, $f : X \to X$ — сжимающее (с конст. $q \in (0,1)$). Тогда $\exists!\, a \in X$, неподвижная для f (т.е. такая, что $f(a) = a$).

Более того: $\forall x_0 \in X$ п-ть

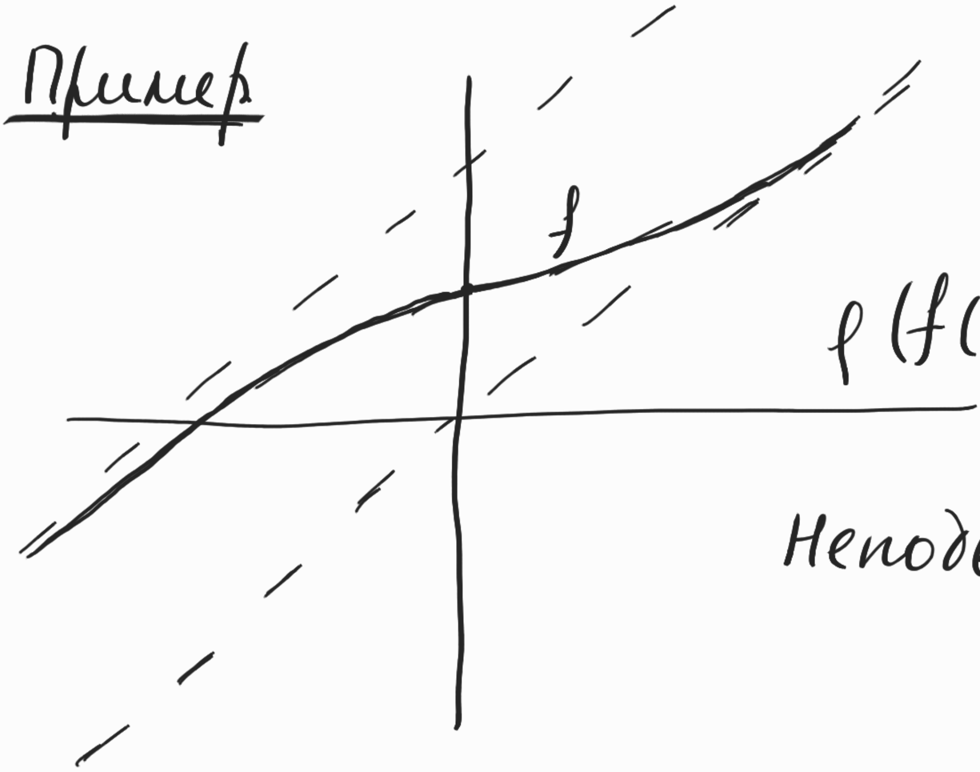
$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots\dots$ сходится к a,

причем $\rho(x_n, a) \le \dfrac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1)$ $\forall n$.

<u>Пример</u> $X = (0, 1]$ $f(x) = \frac{x}{2}$.

Сжим, неподв. точки нет.

<u>Пример</u>



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ $\forall x \ne y$.

Неподв. точки нет.

Вопрос 23

X, Y – топ. пр-ва, $f, g: X \to Y$ непр.

$\mathbb{I} = [0,1]$.

Опр. Гомотопия между f и g – это непр. $F: X \times \mathbb{I} \to Y$, т.ч. **Обозн**: $F: f \simeq g$.

$F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$

Обозн. $\forall t \in \mathbb{I}$ $F_t: X \to Y$, $F_t(x) = F(x,t)$

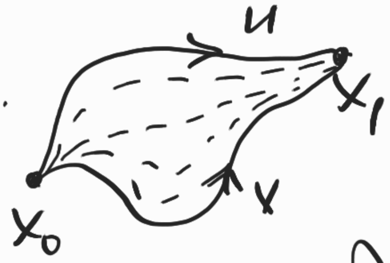
$F_0 = f$, $F_1 = g$.

Опр f и g гомотопны ($f \simeq g$) $\iff \exists$ гомотопия $F: f \simeq g$.

Пусть X – топ. пр-во, $x_0, x_1 \in X$.

$P(x_0, x_1) = \{$пути в X от x_0 до $x_1\}$.

Пусть $u, v \in P(x_0, x_1)$



Опр. Гомотопия $F: u \simeq v$ наз. гомотопией путей $\iff \forall t \in \mathbb{I}$ $F_t \in P(x_0, x_1)$

Т.е: $F: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ – непр., т.ч.

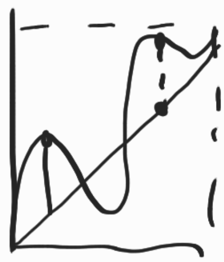
$F(s,0) = u(s)$, $F(s,1) = v(s)$ $\forall s \in \mathbb{I}$

$F(0,t) = x_0$, $F(1,t) = x_1$ $\forall t \in \mathbb{I}$.

Обозн: $F: u \underset{p}{\simeq} v$ (path homotopy)

Опр u, v гомотопны как пути $\iff$
$\iff \exists F: u \underset{p}{\simeq} v$. $\quad (u \underset{p}{\simeq} v)$

Предл. 23.1. (замена параметра)
$u \in P(x_0, x_1)$; $\varphi: I \to I$ непр, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$
$\Rightarrow u \circ \varphi \underset{p}{\simeq} u$.



Предл. 23.2. $\underset{p}{\simeq}$ – отн. экв-ти на $P(x_0, x_1)$.

Обозн.
$$\Pi(x_0, x_1) = P(x_0, x_1) / \underset{p}{\simeq}.$$
$\pi_1(X, x_0) = \Pi(x_0, x_0)$ – мн-во гомот. классов петель в т. x_0.

Опр. $u \in P(x_0, x_1)$, $v \in P(x_1, x_2)$.
Произвед-ие u, v – путь $uv \in P(x_0, x_2)$,
$$(uv)(s) = \begin{cases} u(2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ v(2s-1), & s \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Предл. 23.3. $u_1, u_2 \in P(x_0, x_1)$, $v_1, v_2 \in P(x_1, x_2)$
$u_1 \underset{p}{\simeq} u_2$, $v_1 \underset{p}{\simeq} v_2 \Rightarrow u_1 v_1 \underset{p}{\simeq} u_2 v_2$.

__Сл-вие__ Опр-на операция

$$\Pi(x_0,x_1)\times\Pi(x_1,x_2)\to\Pi(x_0,x_2)$$

$$[u][v]=[uv]$$

(здесь $[u]$ – гомот. класс пути u).

__Обозн.__ $x_0\in X$ $\quad e_{x_0}:\mathbb{I}\to X$

$$e_{x_0}(s)=x_0 \quad \forall s\in\mathbb{I}.$$

__Обозн.__ $u\in P(x_0,x_1)$

Определим $u^{-1}\in P(x_1,x_0)$: $\quad u^{-1}(s)=u(1-s)$

__Т-ма 23.4__

(1) $[e_{x_0}][u]=[u] \quad \forall u\in P(x_0,x_1)$

(2) $[u][e_{x_1}]=[u] \quad \forall u\in P(x_0,x_1)$

(3) $([u][v])[w]=[u]([v][w])$

$\forall u\in P(x_0,x_1),\ \forall v\in P(x_1,x_2),\ \forall w\in P(x_2,x_3).$

(4) $[u][u^{-1}]=[e_{x_0}] \quad \forall u\in P(x_0,x_1)$

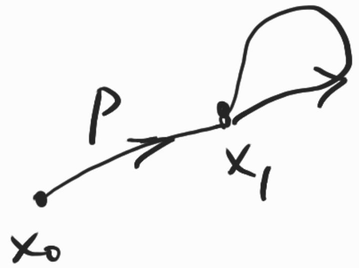
$[u^{-1}][u]=[e_{x_1}]$

__Сл-вие.__ Операция произвед-ия гомот. классов превращ. мн-во $\pi_1(X,x_0)$ в группу.
Нейтр. эл-т – $[e_{x_0}]$. Эл-т, обратный к $[u]$ – это $[u^{-1}]$.

Опр $\pi_1(X, x_0)$ — <u>фунд. группа</u> X в точке x_0.

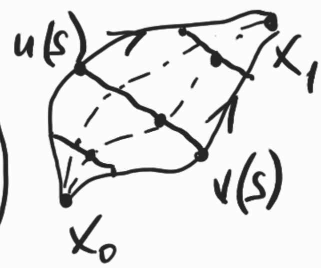
Предл. 23.5 $p \in P(x_0, x_1)$

$\pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, $[u] \mapsto [p][u][p^{-1}]$ — изом-м групп.



Предл. 23.6 $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое мн-во, $x_0 \in X$

$\Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \{e\}$.



$tv(s) +$
$+ (1-t)u(s)$

Опр Топ. пр-во X <u>односвязно</u> $\Longleftrightarrow$ X лин. связно и $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$.

Т-ма 23.7 $\pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$.

Т-ма 23.8 S^n односвязна $\forall\, n \geq 2$.

Стр-ра д-ва т-мы 23.7.

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

$p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$

Набл. (1) $\mathbb{R}$ — группа по $+$, S^1 — по умн-ию.

(2) p — непрер. сюръект. гомом. групп

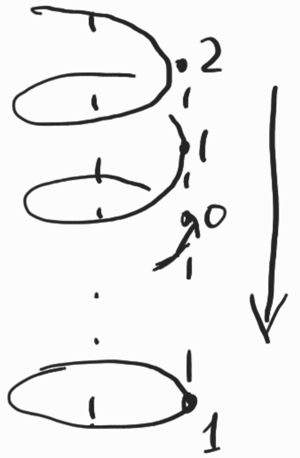
(3) $\operatorname{Ker} p = \mathbb{Z}$.

Лемма 23.9. $p|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ — гомеом-м $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ на $S^1\setminus\{-1\}$.

Обозн. $\ell = \left(p|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\right)^{-1} : S^1\setminus\{-1\}\to(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Опр.

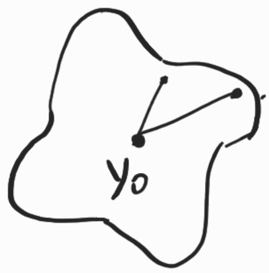
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$



Непр. $g: Y\to\mathbb{R}$ — поднятие $f \iff p\circ g = f$

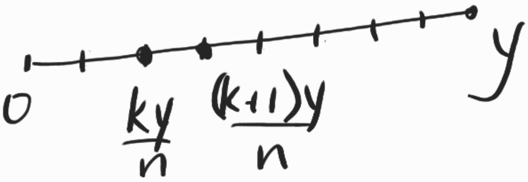
Лемма 23.10 Y — связное топол. пр-во. $f: Y\to S^1$ — непр; $g_1, g_2: Y\to R$ — поднятия f. Предпол: $\exists\, y_0\in Y$ т.ч. $g_1(y_0)=g_2(y_0)$ $\Rightarrow g_1=g_2$.

Опр. $Y\subset\mathbb{R}^n$ — звёздное отн-но точки $y_0\in Y$ $\iff \forall y\in Y$ отрезок $[y_0,y]\subset Y$.



Лемма 23.11 $Y\subset\mathbb{R}^n$ — компактное, звёздное отн-но $y_0\in Y$ мн-во; $f: Y\to S^1$ непр. Тогда $\forall\, t_0\in\mathbb{R}$ т.ч. $p(t_0)=f(y_0)$ $\exists!$ непр. $g: Y\to\mathbb{R}$, поднимающее f и т.ч. $g(y_0)=t_0$.

Идея д-ва: $y_0 = 0$.



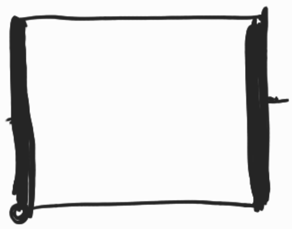
$$f_k(y) = \frac{f\left(\frac{(k+1)y}{n}\right)}{f\left(\frac{ky}{n}\right)} \neq -1.$$

$$g(y) = t_0 + \ell(f_0(y)) + \dots + \ell(f_{n-1}(y)). \quad \square$$

Опр. Пусть $u : I \to S^1$ — петля в т. $1 \in S^1$.
$u(0) = u(1) = 1$.
$\tilde{u} : I \to \mathbb{R}$ — поднятие u, т.ч. $\tilde{u}(0) = 0$.
$p(\tilde{u}(1)) = 1 \Rightarrow \tilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$.
Вращение u — это $W(u) = \tilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$.

Прим. $\omega_n(t) = e^{2\pi i n t}$.
$\tilde{\omega}_n(t) = nt \Rightarrow W(\omega_n) = n$.

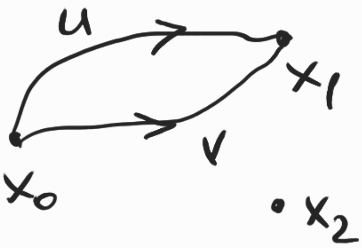
Лемма 23.12.
$u, v : I \to S^1$ — петли в 1.
$u \underset{p}{\sim} v \Rightarrow W(u) = W(v)$.



Лемма 23.13 (Т-МА)
Отобр. $\varphi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, $\varphi([u]) = W(u)$
— изом-м групп.
Обратное отобр: $\varphi^{-1}(n) = [\omega_n]$

Идея д-ва односвяз-ти S^n $(n\geq 2)$.

Неправ. д-во:



$u, v : \mathbb{I} \to S^n \setminus \{x_2\} \cong \mathbb{R}^n$ — односв.

$\square$

Лемма. $a, b \in S^n$ $(n \geq 2)$

$u \in P(a,b)$; $c \notin \{a,b\}$, $c \in S^n$.

$\Rightarrow \exists\, u' \in P(a,b)$, т.ч. $u \underset{p}{\simeq} u'$, $u'(\mathbb{I}) \not\ni c$.

(Она делает неправ. д-во правильным.)

U - окр-ть c, гомеом. шару

$V = S^n \setminus \{c\}$. $\quad S^n = U \cup V$.

$U \setminus \{c\}$ лин. связно.