

## Программа 1 семестра по математическому анализу (осень 2021)

1. Несчетность множества последовательностей из нулей и единиц. Счетность множества рациональных чисел. Иррациональность числа  $\sqrt{2}$ .
2. Множество вещественных чисел. Верхняя и нижняя грань множества на прямой и их существование.
3. Непустота пересечения вложенной последовательности отрезков. Теорема о выборе конечного подкрытия из всякого покрытия отрезка интервалами.
4. Сходящаяся последовательность и ее предел. Основные свойства сходящихся последовательностей.
5. Фундаментальная последовательность. Ограниченность фундаментальной последовательности. Теорема Коши о сходимости фундаментальных последовательностей.
6. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число  $e$ .
7. Подпоследовательности и частичные пределы. Теорема Больцано – Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности во всякой ограниченной последовательности.
8. Открытые и замкнутые множества на прямой. Теорема Бэра.
9. Сходящиеся ряды. Сходимость абсолютно сходящегося ряда. Сходимость ряда Лейбница  $\sum (-1)^n/n$ . Признак Гаусса и исследование сходимости ряда из  $1/n^p$ .
10. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Равносильность условий Гейне и Коши. Критерий Коши существования предела.
11. Непрерывные функции и их основные свойства (сложение, умножение, композиция). Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции.
12. Непрерывность обратной функции для непрерывной монотонной функции. Точки разрыва монотонных функций.
13. Элементарные функции. Замечательные пределы:  
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x, \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x, \lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x.$$
14. Производная. Основные свойства дифференцируемых функций (дифференцируемость сумм, произведений, частных).
15. Теорема Ферма о точках экстремума. Теорема Ролля.
16. Теоремы о среднем (Лагранжа и Коши). Связь монотонности на интервале с производной.
17. Правило Лопиталя.
18. Производная композиции и обратной функции. Производные элементарных функций.
19. Формула Тейлора.
20. Степенные ряды. Разложения Тейлора для  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1 + x)$ ,  $(1 + x)^\alpha$ .
21. Исследование локальных экстремумов в терминах двух первых производных.
22. Выпуклые и вогнутые функции. Условия выпуклости в терминах второй производной. Примеры.
23. Метрические пространства. Пространство  $\mathbb{R}^n$ . Непрерывные отображения, равносильные описания непрерывности. Условие Липшица.
24. Компактные множества в  $\mathbb{R}^n$ . Непрерывные отображения компактов.
25. Дифференцируемые функции многих переменных. Производная, градиент. Теорема о среднем. Дифференцируемость функции с непрерывными частными производными.