Задачи для досрочного экзамена по математическому анализу

1. Доказать, что всякая ограниченная последовательность содержит возрастающую или убывающую подпоследовательность.

2. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, то ее частичные пределы заполняют отрезок от нижнего до верхнего пределов.

3. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что $0\le a_{n+k}\le a_n+a_k$ при всех n,k. Доказать, что последовательность $\{a_n/n\}$ сходится.

4. Доказать, что для всякой последовательности чисел $a_n>0$ верно неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\ge e.$$

5. (i) Доказать, что число e иррационально. (ii) Дана последовательность различных натуральных чисел n_k. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(n_k!)^{-1}$ сходится и его сумма — иррациональное число.

6. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e)$.

7. Докажите, что для всякого вещественного числа x существует бесконечно много пар целых чисел p,q таких, что

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|\le\frac{1}{q^2}.$$

8. Доказать, что последовательность $n\sin n$ содержит ограниченную подпоследовательность.

9. Сходится ли последовательность $a_n=(1+\ln n)^{-1/2}\ln|\sin n|$?

10. Пусть φ — положительная, монотонно убывающая функция на $[0,+\infty)$, причем $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)<\infty$. Доказать, что найдется последовательность положительных чисел α_n, монотонно убывающая к нулю, для которой $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\alpha_n n)<\infty$.

11. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

12. Сходится ли ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$?

13. Доказать, что не существует функции на прямой, для которой множество точек разрыва совпадает с множеством иррациональных чисел.

14. Пусть f — непрерывная функция на $[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$. Будем говорить, что график f имеет горизонталь длины $h\in(0,1]$, если найдется такое $x\in[0,1-h]$, что $f(x)=f(x+h)$. Доказать, что при $h=n^{-1}$, где $n\in\mathbb{N}$, найдется горизонталь длины h, но для всякого иного h есть функция f с указанными свойствами, не имеющая горизонтали длины h.

15. (i) Пусть функция f на множестве $E\subset[0,1]$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L: $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$ для всех $x,y\in E$. Доказать, что ее можно продолжить на весь отрезок с сохранением этого условия. (ii) Верно ли аналогичное утверждение для подмножеств квадрата?

16. Пусть функция f дифференцируема на прямой, $a<b$. Докажите, что f' принимает на отрезке $[a,b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

17. Дифференцируема ли в нуле функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^6}$?

18. Пусть функция f на $\mathbb{R}^2$ такова, что для каждого $x\in\mathbb{R}$ функция $y\mapsto f(x,y)$ непрерывна и для каждого $y\in\mathbb{R}$ функция $x\mapsto f(x,y)$ непрерывна. Доказать, что f имеет точку непрерывности.

19. Дана последовательность функций f_n на $[0,1]$. Верно ли, что всегда найдется такая последовательность чисел $\varepsilon_n>0$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n f_n(x)=0$ для каждого $x\in[0,1]$?

20. Задана бесконечная последовательность многочленов P_n. Всегда ли существует конечный набор функций $f_1,\dots,f_N$, композициями которых можно записать всякий из этих многочленов?

21. Можно ли прямую представить в виде объединения попарно непересекающихся отрезков с положительными длинами?