

# Задачи для досрочной сдачи

по курсу «Дифференциальные уравнения», осень 2021 г.

## Правила сдачи.

1. Решения этих задач сдаются лектору курса А. В. Клименко — сначала в письменном виде (присылайте фото/скан на [klimenko05@mail.ru](mailto:klimenko05@mail.ru)), а затем устно (договаривайтесь с лектором по почте о времени и способе коммуникации).
2. Присылаемые сканы/фото страниц должны быть собраны в один pdf-файл в правильном порядке и ориентации. В письме, к которому приложен файл, напишите, решения каких задач содержатся в файле. Разрешается присылать решения задач в несколько приёмов, но просьба не злоупотреблять этой возможностью.
3. После каждой задачи указана «стоимость» задачи (или отдельных её пунктов) в баллах. Для получения за листок оценки «10» нужно набрать 95 баллов, «9» — 85 баллов, «8» — 75 баллов (максимальная сумма баллов равна 125.).
4. Решения задач должны быть присланы в письменном виде до 23:59 30 ноября, при этом до 23:59 31 октября должны быть присланы решения задач минимум на 40 баллов.
5. При обсуждении решений Вы должны быть готовы сформулировать используемые определения и теоремы. Не пытайтесь сдавать решения, которых вы не понимаете: если это обнаружится, принимающий оставляет за собой право отказаться от дальнейшего приёма задач у Вас.

**Задача 1** (5). Для уравнений  $\dot{x} = f(x, t)$ , где  $f \in C(\mathbb{R}^2)$ , справедлива теорема существования (но не единственности!) решений — теорема Пеано. Рассмотрим множество  $C_\tau$  значений  $x(\tau)$  для всех решений  $x$  задачи Коши  $\dot{x} = f(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Докажите, что множество  $C_\tau$  связно. *Указание.* Теорема о продолжении решения до границы компакта верна и в этом контексте.

**Задача 2** (3+3+5). Рассмотрим дифференциальное уравнение  $y' = \frac{y^2(1+x^2)}{xy+1}$ .

- а) Докажите, что его решения не могут иметь вертикальную асимптоту  $x = x_0$  при  $x_0 \neq 0$ .
- б) Докажите, что имеется минимум два решения, имеющие  $x = 0$  вертикальной асимптотой (одно определено в левой, другое в правой полуокрестности нуля).
- в) Докажите, что этих решений ровно два.

**Задача 3** (3). Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)f'(x) - (3/2)(f''(x))^2}{(f'(x))^2}$$

(он называется *производной Шварца*). Решите дифференциальное уравнение  $Sf = 0$ .

**Задача 4** (3). Рассмотрим уравнение Риккати  $\dot{w} = \alpha(t) + \beta(t)w + \gamma(t)w^2$ . Пусть  $X_{t_0, t_1}(w)$  — отвечающие ему операторы Коши. Докажите, что  $SX_{t_0, t_1} \equiv 0$  при любых  $t_0, t_1$ , явно вычислив производную  $(d/dt)(SX_{t_0, t_1})$ .

**Задача 5** (3). Рассмотрим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(t)x + b(t)y, \\ \dot{y} &= c(t)x + d(t)y.\end{aligned}$$

Поскольку она обладает группой симметрий  $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ , для величины  $z = x/y$  корректно задано дифференциальное уравнение. Выпишите его и объясните, как тогда из задачи 3 получить задачу 4.

**Задача 6** (4). Рассмотрим уравнение  $\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$ , которое задаёт колебания маятника ( $x$  — угол отклонения от вертикали). Докажите, что  $H = \frac{\dot{x}^2}{2} - \omega^2 \cos x$  — его первый интеграл, и постройте *фазовый портрет* этого уравнения, то есть нарисуйте, как качественно выглядит разбиение плоскости с координатами  $(x, \dot{x})$  на траектории этого уравнения. На траекториях поставьте стрелки, показывающие направление движения. Объясните, каким движениям маятника отвечают разные типы траекторий.

**Задача 7** (3+2+2+5). Для уравнения из предыдущей задачи рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = \varepsilon, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \text{где } \varepsilon \in (-\pi, \pi).$$

а) Разложите решение этой задачи Коши в ряд Тейлора до  $o(\varepsilon^3)$  при каждом  $t$ :

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + o(\varepsilon^3).$$

б) Объясните, почему неограниченно возрастающая функция  $x_3(t)$  не противоречит периодичности  $x(t, \varepsilon)$ , полученной в предыдущей задаче.

в) Найдите первый нетривиальный член в асимптотике периода колебания  $T = T(\varepsilon)$ :

$$T(\varepsilon) = T_0 + T_1 \varepsilon^\gamma + o(\varepsilon^\gamma), \quad T_1 \neq 0.$$

г) Докажите, что при любом  $\varepsilon \in (-\pi, \pi)$  верно, что  $T(\varepsilon) \geq T_0$ .

**Задача 8** (3). Рассмотрим уравнение

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

где  $a_j \in C(\mathbb{R})$ . Пусть  $y_1, y_2$  — два его решения, не пропорциональных друг другу. Может ли функция

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

обращаться в нуль в бесконечном числе точек на отрезке  $[0, 1]$ ?

**Задача 9** (1+1+2+2). Найдите наименьшее  $n$ , для которого уравнение

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

а) имеет решение  $x_1(t) = \sin^2 t$ , если  $a_j \in \mathbb{R}$ ;

б) имеет решение  $x_2(t) = t \sin t$ , если  $a_j \in \mathbb{R}$ ;

в), г) те же вопросы, если  $a_j \in C(\mathbb{R})$ .

**Задача 10** (5). Докажите, что любое решение уравнения  $\ddot{x} + tx = 0$  обращается в ноль бесконечное число раз при  $t > 0$ , причём расстояния между соседними нулями стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Задача 11** (1+2). Можно ли выпрямить (перевести диффеоморфизмом в  $\partial/\partial x$ ) на всей плоскости векторные поля: а)  $x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ , б)  $\sin x \frac{\partial}{\partial x} + \cos x \frac{\partial}{\partial y}$ ?

**Задача 12** (3+3). Рассмотрим следующие векторные поля на прямой:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin x \frac{\partial}{\partial x}, \quad 2 \sin x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin^2 x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin 2x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Для каждой пары векторных полей из этого списка выясните:

а) можно ли перевести их друг в друга диффеоморфизмом прямой;

б) можно ли сопрячь их потоки гомеоморфизмом прямой (существует ли гомеоморфизм  $h$ , для которого  $h \circ g_u^t(x) = g_v^t \circ h(x)$  при всех  $t$  и  $x$ ).

*Указание.* Посмотрите на особые точки этих векторных полей и на поведение решений между ними.

**Задача 13** (4). Пусть  $v = \sum_{i=1}^n v_i(\partial/\partial x_i)$  — гладкое векторное поле в  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что оно сохраняет объём (то есть  $\text{Vol } A = \text{Vol}(g_v^t A)$  для любой области  $A$  и любого  $t$ ) тогда и только тогда, когда его *дивергенция*  $\text{div } v := \sum \partial v_i / \partial x_i$  равна нулю во всех точках.

**Задача 14** (4). Пусть векторное поле из предыдущей задачи (с  $\text{div } v = 0$ ) имеет первый интеграл  $F$ . Найдите функцию  $h$ , такую что для любой области  $\Lambda$  на поверхности  $M_c = \{F = c\}$  и любого  $t$  верно

$$\int_{\Lambda} h dS = \int_{g^t \Lambda} h dS.$$

Здесь  $dS$  обозначает элемент площади поверхности  $M_c$ .

**Задача 15** (4).<sup>1</sup> Считая известными свойства производной Ли, включая формулу Картана, решите две предыдущие задачи для векторного поля на многообразии: найдите условие того, что векторное поле  $v$  сохраняет данную форму объёма  $\omega$ , а также найдите, какую форму объёма  $\alpha$  на поверхности  $M_c = \{F = c\}$  сохраняет в этом случае поле  $v|_{M_c}$ . Ответ должен быть дан в бескоординатных терминах.

**Задача 16** (1+2+2+1). Векторное поле  $\dot{x} = v(x)$  в  $\mathbb{R}^n$  (или на многообразии) имеет периодическое решение:  $g^{t_0}(x_0) = x_0$ ,  $t_0 > 0$ . Рассмотрим дифференциал  $dg^{t_0}|_{x_0}: T_{x_0}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_0}\mathbb{R}^n$  отображения потока за период.

- а) Докажите, что 1 — собственное значение этого линейного оператора.
- б) Пусть  $M$  —  $(n - 1)$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , проходящая через точку  $x_0$ , причём

$$T_{x_0}M \oplus \langle v(x_0) \rangle = T_{x_0}\mathbb{R}^n$$

(тогда говорят, что  $M$  *трансверсальна* к векторному полю  $v$  в  $x_0$ ). Пусть также  $t_0$  — минимальный период  $x_0$  под действием потока этого векторного поля. Докажите, что для всех  $y \in M$ , достаточно близких к  $x_0$ , полутраектория  $O^+(y) = \{g^t(y), t > 0\}$  пересечёт  $M$ , причём если  $\tau(y)$  — момент первого пересечения с  $M$ , то  $\tau(y)$  стремится к  $t_0$  при  $y \rightarrow x_0$ .

в) Рассмотрим отображение  $P(y) = g^{\tau(y)}(y)$ . Докажите, что в малой окрестности  $x_0$  это локальный диффеоморфизм  $M$  в себя (его называют *отображением Пуанкаре* на трансверсали  $M$ ).

г) Как соотносятся дифференциалы  $dP|_{x_0}$  и  $dg^{t_0}|_{x_0}$ ? Как связаны их спектры?

*Указание.* Полезно выпрямить векторное поле в окрестности  $x_0$ . К какому наиболее простому виду можно привести при этом поверхность  $M$ ?

**Задача 17** (3+2). а) Пусть векторное поле  $v$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  имеет периодическое решение (все обозначения как в предыдущей задаче). Покажите, что производная отображения Пуанкаре равна якобиану отображения  $g^{t_0}$  и равна

$$\exp\left(\int_0^{t_0} \text{div } v(g^t(x_0)) dt\right).$$

*Указание.* Воспользуйтесь формулой Лиувилля—Остроградского для уравнения в вариациях вдоль этой периодической траектории.

б) Дайте определение устойчивости по Ляпунову периодической траектории, аналогичное такому для особой точки. Как с помощью предыдущего пункта можно исследовать (не)устойчивость периодической траектории?

**Задача 18** (2+1+1+2+1). Рассмотрим ( $C^1$ -гладкое) векторное поле на многообразии, все траектории которого неограниченно продолжаются вперёд по времени.  $\omega$ -предельным множеством точки  $x$  называется множество  $\omega(x)$  таких  $y$ , для которых существует последовательность

<sup>1</sup>Студентам Совбака, решившим задачи 13 и 14, эта задача засчитывается автоматически.

$t_1 \geq t_2 \geq \dots, t_j \rightarrow \infty$ , для которой  $g^{t_j}(x) \rightarrow y$ .

а) Докажите, что  $\omega$ -предельное множество замкнуто и инвариантно относительно преобразований потока.

б) Докажите, что для компактных многообразий  $\omega$ -предельное множество непусто, и приведите пример пустого  $\omega$ -предельного множества в некомпактном случае.

в) Докажите, что для компактных многообразий  $\omega$ -предельное множество связно.

*Указание.* Траектории придётся ходить из окрестности одной компоненты в окрестность другой компоненты бесконечно много раз.

г) Приведите пример несвязного  $\omega$ -предельного множества в некомпактном случае.

*Указание.* Нарисуйте фазовый портрет векторного поля, у которого окружность является  $\omega$ -предельным множеством какой-то точки, после чего попробуйте «утащить в бесконечность» две точки на этой окружности.

д) Для векторных полей на прямой и окружности опишите, как найти  $\omega$ -предельные множества каждой точки.

**Задача 19 (5).** Рассмотрим векторное поле  $v$  на двумерной сфере. Пусть  $\omega$ -предельное множество точки  $x$  содержит точку  $p$  с  $v(p) \neq 0$ . Докажите, что либо траектория точки  $p$  периодична, либо  $\omega(p)$  состоит только из точек  $q$  с  $v(q) = 0$ . Пусть также  $\omega(p)$  содержит точку  $q$ . Докажите, что  $v(q) = 0$ .

*Указание* («мешок Бендиксона»). Если  $v(q) \neq 0$ , выпрямим векторное поле в её окрестности. Орбита точки  $p$  пересекает эту окрестность по бесконечному числу «горизонтальных» отрезков, пусть  $p_j$  — точки их пересечения с «вертикальным» отрезком через точку  $q$ . Тогда кривая, состоящая из фрагмента  $p_j p_{j+1}$  орбиты точки  $p$  и вертикального отрезка с теми же концами обладает таким свойством: она разделяет сферу на две компоненты связности, «мешок» и его дополнение, и траектория векторного поля, начавшаяся в мешке, покинуть его не сможет.

**Задача 20 (3).** Рассмотрим векторное поле  $v$  на двумерной сфере. Пусть точка  $x$  неперiodична и неособа. Могут ли её  $\omega$ -предельное и  $\alpha$ -предельное множество содержать общую точку? общую точку, где  $v \neq 0$ ? (Определение  $\alpha$ -предельного множества отличается от определения  $\omega$ -предельного тем, что последовательность  $(t_j)$  монотонно убывает и стремится к  $-\infty$ .)

**Задача 21 (4).** Рассмотрим векторное поле  $v$  на проективной плоскости. Может ли неперiodическая траектория иметь  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельным множеством одну и ту же перiodическую траекторию?

**Задача 22 (1+1+1+2+3+2+2+5+2).** Осциллятор ван дер Поля задаётся следующей системой уравнений на плоскости:

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -u + k(1 - u^2)v,$$

где  $k > 0$  — параметр.

а) На плоскости  $(u, v)$  укажите области, где векторное поле имеет направление в одном из четырёх квадрантов.

б) Постройте линеаризацию векторного поля в нуле и определите тип этой особой точки.

в) Пусть  $\rho = u^2 + v^2$ . Найдите  $d\rho/dt$  и покажите, что никакая траектория не может войти в круг  $D_c = \{\rho \leq c\}$ , где  $c < 1$ , а любая траектория (кроме особой точки), начинающаяся в  $D_c$ , оттуда выходит.

г) Докажите, что все траектории этой системы неограниченно продолжаются по времени вперёд, и более того, все они попадают в некоторую ограниченную область  $\Omega$  (постройте её).

д) Приведите пример траектории этой системы, которая не продолжается неограниченно назад по времени.

е) Покажите, что  $\omega$ -предельное множество любой траектории (кроме особой точки) — это перiodическая траектория, охватывающая начало координат.

ж) Покажите, что всякая периодическая траектория является центрально-симметричной.

*Указание.* Образ траектории при симметрии относительно нуля — снова траектория этой системы.)

з) Докажите, что всякая периодическая траектория устойчива.

*Указание.*  $\operatorname{div} V = k(1 - u^2) = -\dot{\rho}/(2v^2)$ . Рассмотрим половину траектории, лежащую в верхней полуплоскости. Там  $\rho$  сначала растёт, потом убывает, потом снова растёт до исходного значения. Интеграл от дивергенции разбивается на пары маленьких кусочков, где  $\rho \in [\rho_0, \rho_0 + \Delta\rho]$ . Докажите, что отрицательный вклад того кусочка, где  $\rho$  растёт, перевешивает положительный вклад кусочка, где  $\rho$  убывает.

и) Докажите, что периодическая траектория этой системы единственна.