

ЛИСТОК 1, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СРОК СДАЧИ — ДО 30 СЕНТЯБРЯ 2021 ГОДА

1. Вывести несчетность отрезка из теоремы о вложенных отрезках.
2. Доказать, что всякая система попарно непересекающихся интервалов на прямой не более чем счетна.
3. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ открыто, а множество $B \subset \mathbb{R}$ замкнуто. Доказать, что множество $A \setminus B$ открыто, а $B \setminus A$ замкнуто.
4. Докажите, что интервал нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств прямой.
5. Пусть A — множество на прямой и $\text{Int}\bar{A}$ — множество его внутренних точек его замыкания. Доказать равносильность утверждений: 1) $\text{Int}\bar{A} = \emptyset$; 2) множество A нигде не плотно; 3) замыкание множества A нигде не плотно.
6. Доказать, что множество Кантора нигде не плотно.
7. Доказать, что всякое замкнутое множество на прямой является множеством всех предельных точек некоторой последовательности.
8. Дано множество отрезков, всякие два из которых пересекаются. Докажите, что пересечение всех этих отрезков непусто.
9. Дан набор замкнутых подмножеств отрезка, причем всякий его конечный поднабор имеет непустое пересечение. Докажите, что пересечение всех этих множеств непусто.
10. Докажите, что для всякого вещественного числа x существует бесконечно много пар целых чисел p, q таких, что

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

11. Докажите, что множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a, b — целые числа, всюду плотно на прямой.
12. Докажите, что число $2^{1/2} + 3^{1/3}$ иррационально.