

Листок 1. МНОГООБРАЗИЯ И ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Нарисуйте на плоскости множество точек, которое (а)* может быть образом непрерывной кривой, но не может быть образом гладкой кривой (Ответ необходимо обосновать!); (б) может быть образом гладкой, но не может быть образом регулярной кривой.

2. Введите на множестве всех прямых на плоскости естественную топологию и структуру гладкого многообразия, так, чтобы оно было гомеоморфно листу Мёбиуса.

3. (а) Докажите, что группа $SO(3)$ гомеоморфна проективному пространству $\mathbb{R}P^3$. Постройте диффеоморфизм.

(б) Докажите, что $SO(3)$ является гладким подмногообразием в пространстве \mathbb{R}^9 всех квадратных матриц третьего порядка.

(в) Докажите, что пространство единичных касательных векторов к S^2 гомеоморфно $SO(3)$. Постройте диффеоморфизм.

Векторное поле на плоскости \mathbb{R}^3 называется *центральным* с центром в O , если оно инвариантно относительно группы движений пространства (включая отражения), оставляющих точку O на месте.

4. Докажите, что всякое центральное поле а) направлено по лучу, исходящему из O ; б) потенциально. Найти потенциал поля $\frac{\vec{r}}{r^a}$.

5. Вычислите интеграл $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$.

6. Пусть (M, \mathcal{A}) и $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{A}})$ — многообразия с заданными на них гладкими C^k -структурами. Гладкие структуры (M, \mathcal{A}) и $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{A}})$ считаются *изоморфными*, если существует такое C^k -отображение $f : M \rightarrow \tilde{M}$, которое имеет обратное $f^{-1} : \tilde{M} \rightarrow M$ также C^k -отображение в атласах $\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}$.

(а) Покажите, что гладкая структура на \mathbb{R} , заданная картой $(\mathbb{R}, \varphi(x) = x)$, изоморфна гладкой структуре на \mathbb{R} , заданной картой $(\mathbb{R}, \varphi(x) = x^3)$, но не совпадает с ней.

(б) Покажите, что на \mathbb{R} все структуры одинаковой гладкости изоморфны.

(в) Покажите, что на окружности S^1 любые две C^∞ -структуры изоморфны.

(Отметим, что это свойство верно также для сфер S^3, S^5, S^6 , для сферы S^4 это до сих пор неизвестно, а про сферу S^7 Милнором было доказано существование ровно 28 недиффеоморфных гладких структур.)

7. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция,

$$\Sigma_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = C\}$$

её множество уровня и $\text{grad } f(x) \neq 0, x \in \Sigma_C$. Докажите, что в этом случае на Σ_C можно ввести структуру гладкого $(n - 1)$ -мерного многообразия.

8. * Докажите, что гладкая замкнутая кривая на плоскости, не имеющая самопересечений, имеет не менее четырёх экстремумов кривизны.