Листок 3

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать. (Каждый пункт оценивается отдельно, пункт со звездочкой считается с удвоенным весом. Задачи, успешно рассказанные у доски на семинаре, объявлять не надо, их отметит преподаватель семинара.) Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X + 4 - 2N + 3k$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество рассказанных у доски на семинаре задач.

ВАЖНО: Задавайте вопросы преподавателям! Спрашивайте обо всем, в чем не уверены! На количество вопросов до сдачи листка нет ограничений.

Задача 1. Какие из приведенных ниже отношений являются отношениями частичного порядка на плоскости? А какие являются отношениями линейного прядка?

$(x, y) \preceq_1 (x', y')$ если одновременно $x \le x'$ и $y \le y'$;
$(x, y) \preceq_2 (x', y')$ если выполняется хотя бы одно из неравенств $x \le x'$ и $y \le y'$;
$(x, y) \preceq_3 (x', y')$ если $\max(x, y) \le \min(x', y')$;
$(x, y) \preceq_4 (x', y')$ если $x + y \le x' + y'$;
$(x, y) \preceq_5 (x', y')$ если $x < x'$, или $x = x'$, но $y < y'$, или же $x = x'$ и $y = y'$.

Задача 2. Сколько различных отношений частичного порядка можно ввести на множестве из трех элементов ? Нарисуйте их диаграммы Хассе.

Задача 3. Приведите три примера бинарных операций, каждая из которых удовлетворяет двум перечисленным условиям и не удовлетворяет третьему. Условия: коммутативность; ассоциативность; существование нейтрального элемента.

Задача 4. Пусть R — отношение эквивалентности на множестве X. Классом эквивалентности элемента $a \in X$ называется множество $\{x \in X, \quad xRa\}$. Покажите, что любые два класса эквивалентности либо не пересекаюся, либо совпадают, и что тем самым отношение эквивалентности R задает представление множества X в виде объединения его непересекающихся подмножеств (классов эквивалентности). Множество классов эквивалентности называется фактор-множеством и обозначается X/R. Покажите что, наоборот, любое представление множества X в виде объединения его непересекающихся подмножеств задает отношение эквивалентности на X, определяемое тем, что два элемента множества X эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же подмножестве разбиения.

Задача 5. Пусть $f : X \to Y$ некоторое отображение. Введем на X отношение R так: aRb, если $f(a) = f(b)$. Докажите, что R является отношением эквивалентности, и установите биекцию между X/R и образом $f(X)$ отображения f.

Задача 6. Пусть на множестве X задана бинарная операция $*$ и отношение эквивалентности $\sim$. Говорят, что операция $*$ *согласована* с отношением эквивалентности $\sim$, если из $a \sim a'$ и $b \sim b'$ следует, что $a * b \sim a' * b'$. Покажите, что тогда на фактор-множестве $X/\sim$ можно определить бинарную операцию $\bar{*}$ следующим образом: если $A \subset X$ и $B \subset X$ — два класса эквивалентности, то $A \bar{*} B$ это класс эквивалентности, содержащий $a * b$, где a — какой-нибудь элемент класса A, а b — какой-нибудь элемент класса B. Покажите, что если операция $*$ была коммутативной, ассоциативной или обладала нейтральным элементом, то тем же свойством будет обладать и операция $\bar{*}$ на $X/\sim$. Приведите два примера таких операций.

Задача 7. Зададим отношение "$\sim$" на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ следующим образом: $(a,b) \sim (a',b')$ если $a + b' = a' + b$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Опишите фактор-множество. Докажите, что операция покоординатного сложения на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ согласована с этим отношением эквивалентности. Покажите, что определенная в соответствии с задачей 6 операция сложения на фактор-множестве $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ коммутативна, ассоциативна, обладает нейтральным элементом, и любой класс обладает противоположным. Опишите это фактор-множество.

Задача 8. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Введем на множестве $\mathbb{Z}$ отношение *сравнимости по модулю n*: $x \equiv y \mod n$ если $x - y$ делится на n. Покажите, что операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}$ согласованы с этим отношением эквивалентности.

Это фактор-множество с введенными операциями сложения и умножения обозначается $\mathbb{Z}_n$.

Задача 9. Докажите, что на $\mathbb{Z}_n$ нельзя ввести никакого нетривиального отношения частичного порядка, с которым была бы согласована операция сложения на $\mathbb{Z}_n$, то есть такого, что из $a \leq b$ следует, что $a + c \leq b + c$ для любого $c \in \mathbb{Z}_n$.

Задача 10. Введем на множестве векторов в трехмерном пространстве отношение эквивалентности следующим образом: два вектора эквивалентны, если их разность параллельна оси OZ. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности и операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности. Установите биекцию между фактор-множеством и множеством векторов плоскости.

Задача 11. Изменим отношение эквивалентности из предыдущей задачи следующим образом: пусть теперь два вектора эквивалентны, если их разность параллельна плоскости XOY. Докажите, что операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности. Дайте описание фактор-множества, аналогичное приведенному в предыдущей задаче.

Задача 12. Пусть $f : X \to X$ некоторое отображение. Рассмотрим на X следующее отношение: xRy, если для некоторого $k \geq 0$ $y = f^k(x)$.
а) * Докажите, что если R является отношением эквивалентности, то f биекция. Верно ли обратное? Если нет, найдите и докажите достаточное условие.
б) * Докажите, что если $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(X) = \varnothing$, то R является отношением частичного порядка. Верно ли обратное? Если нет, найдите и докажите необходимое условие.

Задача 13. Пусть X, Y некоторые множества. Введем отношение на множестве отображений Y^X следующим образом: если $f, g \in Y^X$, то fRg, если существуют такие две биекции $\varphi : X \to X$ и $\psi : Y \to Y$, что $\psi \circ f = g \circ \varphi$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Покажите, что все отображения, у которых $f(X)$ состоит из одного элемента, эквивалентны. Опишите классы эквивалентности тех отображений f, у которых $|f(X)| = 2$. Сколько их, если X конечно и состоит из n элементов?

Задача 14. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел введем отношение эквивалентности $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Z}$. Обозначим соответствующее фактормножество $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Постройте биекцию между $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и окружностью $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Отождествите функции на S^1 с периодическими функциями на $\mathbb{R}$.

Композицией отношений $R_1 \in M \times N$ и $R_2 \in N \times P$ называется отношение $R_1 \circ R_2 \in M \times P$ такое, что $(x,y) \in R_1 \circ R_2$ если $\exists z \in N$, такое что $(x,z) \in R_1$ и $(z,y) \in R_2$.

Задача 15. * Отношение $\Gamma_1 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - транспонированное к графику функции $x = 2\cos\varphi$: $\Gamma_1 = \{(2\cos\varphi, \varphi) | \varphi \in \mathbb{R}\}$, отношение $\Gamma_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - график функции $y = 3\sin\varphi$: $\Gamma_2 = \{(\varphi, 3\sin\varphi,) | \varphi \in \mathbb{R}\}$. Вычислите композицию $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ и опишите ее как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 16. * Граф называется связным, если из любой вершины можно пройти в любую. Ребро графа называется *мостом*, если после удаления этого ребра граф перестает быть связным. Назовем две вершины эквивалентными, если из одной можно пройти в другую, не проходя по мостам. Докажите, что это отношение эквивалентности. Докажите, что если в графе k мостов, то классов зквивалентности будет ровно $k+1$. Докажите, что если из графа удалить все мосты, то каждый класс эквивалентности будет связным графом.

Задача 17. ** Пусть граф не имеет мостов. Назовем ребро такого графа *рокадой*, если при его удалении в графе появляется мост. Введем на множестве всех рокад данного графа отношение эквивалентности следующим образом: каждая рокада эквивалентна самой себе, а две различные рокады эквивалентны, если при их удалении граф становится несвязным. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности. Приведите примеры графов с как угодно большими классами эквивалентности и любым наперед заданным числом классов эквивлентности. Докажите, что при удалении рокад из одного класса эквивалентности число связных компонент получившегося графа рано числу удаленных рокад.