

## Листок 1

Дедлайн 6 октября

- (1) Решите задачу линейного программирования, используя метод исключения Фурье–Мощкина

$$\begin{aligned}2x - 6y &\rightarrow \max \\x + y + z &\geq 2 \\2x - y + z &\leq 1 \\x, y, z &\geq 0.\end{aligned}$$

- (2) Докажите следующий вариант леммы Фаркаша: для матриц  $A, B, C$  и векторов  $u, v, w$  выполнена одна из двух взаимоисключающих возможностей.

- Существует вектор  $x$  т.ч.

$$Ax = u, Bx \geq v, Cx \leq w$$

- существуют такие векторы  $a, b, c$ , что

$$A^T a + B^T b + C^T c = 0, b \leq 0, c \geq 0, \langle a, u \rangle + \langle b, v \rangle + \langle c, w \rangle < 0.$$

- (3) Напомним, что гиперплоскостью, несущей к выпуклому телу  $A$  в точке  $x \in A$ , называется такая гиперплоскость  $H \ni x$ , что  $A$  содержится в одном из полупространств, определяемых этой гиперплоскостью.

Пусть  $A$ — замкнутое выпуклое множество,  $x \notin A$ .

- Докажите, что существует единственная точка  $y \in A$ , для которой

$$|x - y| \leq |x - z|, \forall z \in A$$

- Докажите, что гиперплоскость, содержащая  $y$  и ортогональная к  $x - y$  является несущей к  $A$ .

- (4) Найдите решение задачи

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n &\rightarrow \min \\x_1 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 2, \dots, x_1 + \dots + x_n &\geq n. \\x_i &\geq 0.\end{aligned}$$

Сформулируйте и решите двойственную задачу.

- (5) Описать все решения задачи

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^n a_j x_j \leq b, x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n,$$

где  $b, a_j > 0$ . Показать, что если  $c_j > 0$  и все числа  $b \frac{c_j}{a_j}$  различны, то решение единственно.

- (6) Сформулируйте двойственную задачу к задаче 1 и решите ее.