Выпуклые множества. Базовые свойства.

(1) **Стандартная форма задачи линейного программирования на максимум.** Переменная x принадлежит пространству $\mathbb{R}^n$. Задан вектор $c \in \mathbb{R}^n$, линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$. Изучается задача

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max .$$

при ограничениях

$$Ax \le b,$$
$$x_i \ge 0,\ \forall 1 \le i \le n.$$

Докажите, что каждую задачу линейного программирования можно привести к стандартной форме.

(2) Как для данной линейной функции $\langle c, x\rangle$ найти ее максимум на кубе $Q = [-1,1]^n$? Как для точки $y \notin Q$ найти линейное неравенство, которому удовлетворяет y, но не удовлетворяют точки Q?

(3) Докажите, что выпуклой оболочкой множества A является множество вида

$$\Big\{t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_mx_m,\ 0 \le t_i \le 1, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1,\ x_i \in A,\ m \in \mathbb{N}\Big\}.$$

В частности, докажите, что выпуклой оболочкой конечного множества точек $\{x_i\}, 1 \le i \le n$ является множество вида

$$\Big\{t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n,\ 0 \le t_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\Big\}.$$

(4) Придумайте пример невыпуклого множества X, для которого выполнено свойство: $x, y \in X \to \frac{x+y}{2} \in X$. Докажите, что если замкнутое множество X удовлетворяет этому свойству, то X выпукло.

(5) **(Теорема Радона)** Предположим, что $X = \{x_i\}$, $1 \le i \le m$ — аффинно зависимые точки в $\mathbb{R}^n$, т.е. существуют коэффициенты α_i со свойством $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$. Докажите, что тогда существует разбиение X на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

(6) **(Теорема Хелли)** Докажите, что если A_i, $1 \le i \le m$, $m \ge n+1$ — выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ и любые $n+1$ из них имеют непустое пересечение, что все они имеют непустое пересечение.

(7) **(Теорема Каратеодори)** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathrm{conv}(A)$. Докажите, что x принадлежит выпуклой оболочке $n+1$ точки из A.

(8) (a) Верно ли, что выпуклая оболочка открытого множества открыта?
(b) Верно ли, что выпуклая оболочка замкнутого множества замкнута?
(c) Верно ли, что выпуклая оболочка ограниченного множества ограничена?
(d) Верно ли, что выпуклая оболочка компакта есть компакт?