Выпуклые множества. Базовые свойства.

Лемма Фаркаша. Отделимость, вершины, грани

Предполагается известным: лемма Фаркаша, понятие проекции точки, несущей гиперплоскости, вершины многогранника, крайней точки выпуклого множества.

(1) Решите задачу линейного программирования, используя элиминацию Фурье-Моцкина:

$$\begin{aligned} 5x + y &\to \max, \\ 2x + y &\geq 5, \\ y &\geq 1, \\ 2x + 3y &\leq 6, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

(2) Пусть $P = \operatorname{conv}(V)$, где V — конечное множество точек. Пусть точка $v \in V$ не может быть представлена в виде выпуклой комбинации остальных точек из V. Докажите, что v — вершина. Указание: используйте лемму Фаркаша. Выведите отсюда, что каждый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин.

(3) Докажите теорему об отделимости для 1) точки и замкнутого множества, 2) выпуклых множеств, имеющих пустое пересечение относительных внутренних точек.

(4) Используя предыдущие упражнения докажите, что любая грань F многогранника P является выпуклой оболочкой вершин многранника, лежащих в пересечении P с несущей гиперплоскостью, определяющей F.

(5) Докажите, что если K — выпуклый компакт и $A \subset K$, то K совпадает с выпуклой оболочкой A если и только если A содержит крайние точки компакта.

(6) Докажите, что куб имеет $3^n + 1$ граней (включая пустое множество и сам куб).