

Листок 1
ДОП.ГЛАВЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ
ВВЕДЕНИЕ

1. Докажите, что при параллельном переносе сохраняются длины векторов, а также углы между двумя данными векторами.

2. (а) Пусть две поверхности в \mathbb{E}^3 касаются вдоль кривой. Докажите, что результат параллельного переноса касательного вектора к обеим поверхностям вдоль этой кривой совпадает.

(б) Пусть две поверхности в \mathbb{E}^3 касаются вдоль кривой, причём эта кривая является геодезической для одной из поверхностей. Докажите, что тогда она является геодезической и для второй поверхности.

2. (а) Докажите, что если прямая лежит на поверхности, то она является там геодезической.

(б) Докажите, что геодезические в \mathbb{E}^n в точности прямые.

3. Докажите, что подмногообразие риманова многообразия является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда его вторая квадратичная форма зануляется.

4. Найти геодезические на стандартной сфере, прямом круговом цилиндре и круговом конусе. Все поверхности реализованы как поверхности в \mathbb{E}^3 .

5. Пусть $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$ – единичная сфера c – произвольная параллель и V – касательный вектор к \mathbb{S}^2 в некоторой точке $p \in c$. Опишите геометрически параллельный перенос V вдоль c .

6. (а) Найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов поверхности вращения.

(б) Докажите, что меридианы поверхности вращения – геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

7. Рассмотрим верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ снабженную *гиперболической метрикой*:

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

(а) Покажите, что символы Кристоффеля связности Леви-Чивита этой метрики есть

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

(б) Рассмотрим касательный вектор $V = (0, 1)$ к точке $(0, 1) \in \mathbb{R}_+^2$ (мы отождествляем касательное пространство к \mathbb{R}_+^2 с \mathbb{R}^2). Пусть $V(t)$ – результат параллельного переноса V вдоль кривой $x = t, y = 1$. Покажите, что вектор $V(t)$ образует угол t с направлением оси y , отсчитываемый по часовой стрелке.