# Листок 5

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать. (Каждый пункт оценивается отдельно, пункт со звездочкой считается с удвоенным весом. Задачи, успешно рассказанные у доски на семинаре, объявлять не надо, их отметит преподаватель семинара.) Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день.

Оценка за листок вычисляется по числу $X$ объявленных задач по формуле $X + 8 - 2\left[N + \frac{2}{N-1}\right] + 3k$. Здесь $N$ – номер недели, когда происходит сдача листка, $k$ - количество успешно рассказанных у доски на семинаре задач, $[a]$ это целая часть числа $a$.

**Задача 1.** Изоморфны ли следующие упорядоченные множества:

a) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$?

b) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap [0,1]$?

c) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0,1)$?

**Задача 2.** Пусть $X$ - вполне упорядоченное множество. Докажите, что

a) $X$ содержит минимальный элемент.

b) для всякого $x \in X$, кроме максимального, есть непосредственно следующий за ним (но не обязательно есть предыдущий).

c) любое ограниченое сверху множество элементов имеет точную верхнюю грань.

**Задача 3.** Пусть $M$ и $N$ - два линейно упорядоченных множества. Тогда на их произведении $M \times N$ можно определить два естественных отношения порядка: "покоординатное": $(x, y) \leq_c (x', y')$, если $x \leq x'$ и $y \leq y'$ и "лексикографическое" : $(x, y) \leq_l (x', y')$ если $x < x'$ (т.е., $x \leq x'$ и $x \neq x'$) либо $x = x'$ и $y \leq y'$.

a) Докажите, что $\leq_c$ и $\leq_l$, действительно, являются отношениями порядка, одно из которых есть отношение линейного порядка, а другое нет, одно согласовано с проекциями на сомножители (т.е. проекции являются гомоморфизмами упорядоченных множеств), а другое нет.

b) Для лексикографического отношения порядка $\leq_l$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ нарисуйте множество всех таких точек $p \in \mathbb{R}^2$, что $(1, 2) \leq_l p \leq_l (2, 1)$.

**Задача 4.** Пусть $M$ — конечное множество, $|M| = m$. Установите изоморфизм между следующими упорядоченными множествами: множеством $2^M$ всех подмножеств множества $M$ и множеством последовательностей из нулей и единиц длины $m$ с покомпонентным порядком $\leq_c$.

**Задача 5.** Рассмотрим финитные последовательности натуральных чисел, т.е., последовательности, все члены которых, за исключением конечного числа, равны нулю. Порядок - покомпонентное сравнение. Докажите, что это частично упорядоченное множество изоморфно множеству натуральных чисел с отношением делимости.

**Задача 6.** a) Рассмотрим множество $2^M$ всех подмножеств конечного множества $M$, $|M| = m$. Порядок - включение подмножеств. Сколько автоморфизмов у этого множества?

b) Покажите, что у множества $\mathbb{N}$, упорядоченного по отношению делимости, континуум автоморфизмов

**Задача 7.** Два различных элемента $x$ и $y$ линейно упорядоченного множества $X$ называются соседними, если не существует такого отличного от $x$ и $y$ элемента $z \in X$, для которого верно одно из двух двойных неравенств $x \prec z \prec y$, либо $y \prec z \prec x$. Линейно упорядоченное множество $X$ называется плотным, если в нем нет соседних элементов. Докажите, что всякое плотное линейно счетное упорядоченное множество без максимального и минимального элементов изоморфно $\mathbb{Q}$.

**Задача 8.** Сформулируйте лемму Цорна, аксиому выбора и теорему Цермело, определив при этом все необходимые для формулировок понятия.

**Задача 9.** Выведите из леммы Цорна следующие утверждения:

a) * всякий частичный порядок может быть продолжен до линейного

b) * у любой сюръекции есть левый обратный;

c) * в любом линейном пространстве существует максимальное подпространство, не содержащее данный вектор;

d) * на любом линейном пространстве существует линейная функция, равная нулю на одном наперед заданном векторе и единице на втором;

e) * любые два множества сравнимы по мощности.

**Задача 10.** * Придумайте прямое доказательство леммы Цорна для счетного множества.

**Задача 11.** Выведите из леммы Цорна

a) * аксиому выбора

b) * теорему Цермело

**Задача 12.** a) * Пусть $X$ - вполне упорядоченное множество с отношением порядка $\prec$. Назовем два его элемента $x$ и $x'$ эквивалентными ($x \sim x'$), если между ними заключено лишь конечное число элементов множества $X$. (Т.е. конечно множество таких $y \in X$, что верно хотя бы одно из двух двойных неравенств $x' \prec y \prec x$ или $x \prec y \prec x'$.) Докажите, что это отношение, действительно, является отношением эквивалентности на $X$.

b) * Докажите, что каждый класс эквивалентности изоморфен (как упорядоченное множество) множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

c) * Поскольку $X$ вполне упорядочено, в каждом классе эквивалентности есть минимальный элемент. Докажите, что множество таких минимальных элементов совпадает с множеством тех элементов $X$, у которых нет непосредственного предшественника. (Элемент $y$ называется непосредственным предшественником элемента $x$, если $y \prec x$, $y \neq x$, и для любого $z \in X$ из $z \prec x$ следует, что $z \prec y$.)

d) * Рассмотрим фактор-множество $W = X/\sim$. Докажите, что существует биекция между $X$ и $W \times \mathbb{N}$.

e) * Докажите, что $X$ равномощно $X \times \mathbb{N}$.

**Задача 13.** Все утверждения этой задачи основываются на аксиоме выбора.

a) * Докажите, что если бесконечные множества $X$ и $X'$ равномощны, то $X \cup X'$ также равномощно $X$.

b) * Докажите, что если $Y \subset X$ и $X$ бесконечно, то хотя бы одно из множеств $Y$ и $X \setminus Y$ равномощно $X$.

c) ** Докажите, что если множество $X$ бесконечно, то $X \times X$ равномощно $X$.