Семинар 3

Приводимость. Разложимость. Инвариантные подпространства. Лемма Шура

1. Доказать, что представление T и двойственное (сопряженное, контрагредиентное) ему представление T^* (см.Семинар 2, задача 6) одновременно приводимы или неприводимы.

2. Доказать, что эти представления разложимы (неразложимы) одновременно.

3. Доказать, что подпредставление разложимого представления разложимо.

4. Пусть пространство V представления группы G является суммой(не обязательно прямой) G-ивариантных подпространств W_α, каждое из которых неприводимо, и пусть U – любое G-ивариантное подпространство. Доказать, что пространство $V = U \oplus W_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus W_{\alpha_m}$, для некоторого конечного набора подпространств из коллекции W_α.

5. Пусть пространство представления V группы G разложено в прямую сумму неприводимых G-инвариантных подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ причем представления $G{:}W_i$ попарно не эквивалентны. Тогда всякое инвариантное подпространство U есть прямая сумма некоторой части подпространств W.

6. Описать все неприводимые комплексные представления группы диэдра порядка 6; группы диэдра порядка 8.

7. Найти все неприводимые комплексные представления группы верхних треугольных матриц с определителем 1 над полем из трех элементов.

Просто так 1. Рассмотрим аффинное пространство линейных операторов в векторном пространстве V. Доказать, что проекторы на фиксированное подпространство $W \subset V$ (что такое проектор?) образуют аффинное подпространство.

Просто так 2. Показать, что группа $GL(V)$ естественно действует аффинными преобразованиями на пространстве операторов по формуле $X \to gXg^{-1}$, $g \in GL(V)$.

Просто так 3. Доказать, что положительно определенные (что это значит?) эрмитовы матрицы образуют выпуклый конус в вещественном векторном пространстве всех эрмитовых матриц.