Дифференциальные уравнения 2021

Домашнее задание № 1

Элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений

Дата сдачи задания: 19 октября 2021 к началу семинарского занятия

Рекомендация. В задачнике А.Ф. Филиппова “Сборник задач по дифференциальным уравнениям” имеется краткое изложение основных методов интегрирования предложенных ниже задач. Теория и полезные приемы представлены в начале каждого тематического раздела задачника.

---

1. Стенки сосуда с жидкостью имеют форму поверхности вращения вида

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a},$$

где $a > 0$ — заданная константа, ось Oz направлена вертикально вверх. Сосуд заполнен жидкостью до уровня $z = H$.

В некоторый момент в нижней точке сосуда открывается небольшое отверстие, площадь которого меняется со временем по закону

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{1 + (t/T_0)^2}$$

где t — время, прошедшее с момента открытия отверстия, σ_0 и T_0 — заданные параметры. Найдите все значения параметра T_0, при которых жидкость успеет полностью вытечь из сосуда до закрытия отверстия. Считайте, что зависимость скорости вытекания жидкости из малого отверстия описывается законом Торричелли $v(h) = \sqrt{2gh}$, где h — текущее значение уровня жидкости в сосуде.

2. Найдите семейство гладких кривых в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, обладающих следующим свойством. Проведем касательную в произвольной точке P кривой семейства и найдем точку Q, в которой эта касательная пересекает ось ординат Oy. Тогда ордината y_Q равна абсциссе точки касания P: $y_Q = x_P$.

3. Найдите кривую в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, которая содержит точку $(0, 3a)$ (в декартовой прямоугольной системе координат) и обладает следующим свойством. Построим нормаль к кривой в произвольной ее точке M и найдем точку N, в которой эта нормаль пересекает ось абсцисс Ox. Тогда середина отрезка MN лежит на кривой $y^2 = ax$, где $a > 0$ — заданная константа.

Найдите общее решение дифференциальных уравнений

4. $$x\,\frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

5. $$\frac{dy}{dx}\,\sqrt{1 - x^4} + x(1 + e^y) = 0$$

6. $$\frac{dy}{dx} - xy^2 = 2xy$$

7. $$\frac{dy}{dx} = \sin 2(x + y) - 1$$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+x}{y-x}$

9. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

10. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$

11. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$

12. $\dfrac{ds}{dt} + s\cos t = \dfrac{1}{2}\sin 2t$

13. $\Big(x\dfrac{dy}{dx} - 1\Big)\ln x = 2y$

14. $xy(1+xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 1$

15. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2\sqrt{y}$

Найдите значения вещественного параметра α, при котором уравнение становится уравнением в полных дифференциалах и решите его для этих значений α

16. $(x^2+y^\alpha)dx + (\alpha x - 2y)\,dy = 0$

17. $\Big(\cos^2 x - (x+y)\sin\dfrac{x}{\alpha}\Big)dx + 2(\alpha-1)\sin^2 x\,dy = 0$

18. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^\alpha}{(x-y)^2}\right)dx - \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^\alpha}{(x-y)^2}\right)dy = 0$

Найдите интегрирующий множитель и решите уравнения в дифференциалах

19. $\Big(1+\dfrac{3y^2}{x^2}\Big)\,dx = \dfrac{2y}{x}\,dy$

20. $\Big(2x+\dfrac{y}{x^2}\Big)dx + \Big(x^2 - \dfrac{y+1}{x}\Big)\,dy = 0$

21. $\ln y\,dx - \dfrac{x}{y}\,dy = 0$