Лекция 3.

$\#\Omega < \infty$

$(\Omega, \mathbb{P})$, $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$, $A_\xi = \{a_1, \dots, a_k\}$ $\xi(\Omega) = A_\xi$

$\mathbb{P}_\xi = (p_{a_1}, \dots, p_{a_k})$, $p_{a_i} = \mathbb{P}(\xi = a_i) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = a_i\})$

— распределение ξ.

Пример: n раз бросаем монетку, броски независимые. $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_j = 0$ или $1\}$ (решка, орел).

орёл p, решка $q = 1-p$

η — сл. величина $\eta(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ — число орлов.

$P_\eta - ?$ $A_\eta = \{0, 1, \dots, n\}$. $P_\eta = (\mathbb{P}(\eta=0), \mathbb{P}(\eta=1), \dots, \mathbb{P}(\eta=n))$

$$\boxed{\mathbb{P}(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} q^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i} = p^{\eta(\omega)} q^{n-\eta(\omega)}}$$

$$\underset{\{\omega:\, \eta(\omega)=k\}}{\mathbb{P}(\eta = k)} = \sum_{\omega:\, \eta(\omega)=k} \underset{p^k q^{n-k}}{\mathbb{P}(\omega)} = \boxed{C_n^k p^k q^{n-k}}$$

$$P_\eta = (q^n, npq^{n-1}, C_n^2 p^2 q^{n-2}, \dots, p^n) \text{ — биномиальное распределение}$$

$$\eta \sim B(n, p) \quad q = 1-p$$

Основные характеристики случайных величин

$\xi(\Omega) = A_\xi$

Опр Математическим ожиданием случайной величины ξ наз-ся

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{a_j \in A_\xi} a_j \mathbb{P}(\xi = a_j) = \sum_{a_j \in A_\xi} a_j p_{a_j}$$

Если $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\#\Omega}$, то $\mathbb{E}\xi = \frac{\sum \xi(\omega)}{\#\Omega}$ — среднее арифм. значений ξ.

$\mathbb{P}(\omega_1)\ \xi(\omega_1)$ $\mathbb{E}\xi$ $\xi(\omega_2)\ \mathbb{P}(\omega_2)$

Св-ва:

- $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$, $\forall \xi, \eta$ — сл. вел., $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{E}\,\mathrm{const} = \mathrm{const}$
- $\xi \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\xi \geq 0$.

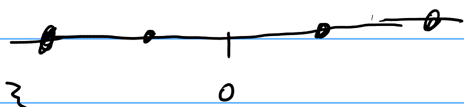
Опр Дисперсией случ. вел. ξ наз-ся

$$\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2. \quad \text{— } \boxed{\text{средне квадратичное отклонение}}$$

$\mathbb{E}\xi^p$ — p-ый момент.

Если $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\mathrm{Var}\,\xi = \underset{\text{второй момент } \xi}{\mathbb{E}\xi^2}$

$\tilde{\xi} = \xi - \mathbb{E}\xi \Rightarrow \mathbb{E}\tilde{\xi} = 0.$



Пример $\xi_1 = \begin{matrix} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{matrix}$ $\quad \mathbb{E}\xi_1 = 0 \quad \mathrm{Var}\,\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

$\xi_2 = \begin{matrix} 100, & \frac{1}{2} \\ -100, & \frac{1}{2} \end{matrix}$, $\quad \mathbb{E}\xi_2 = 0, \quad \mathrm{Var}\,\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 = 100^2 \cdot \frac{1}{2} + (-100)^2 \cdot \frac{1}{2} = 10000.$

$\mathbb{P}(\xi_2 = 100) = \frac{1}{2}.$

Утв $\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2.$ — удобна для счёта.

Док-во $\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2\underset{-2(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}(\xi\mathbb{E}\xi)} + \underset{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}(\mathbb{E}\xi)^2}$

Св-ва дисперсии:
- $\mathrm{Var}(\xi + \eta) \neq \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$
- $\mathrm{Var}(\mathrm{const}\,\xi) = \mathrm{const}^2\,\mathrm{Var}\,\xi$
- $\mathrm{Var}\,\mathrm{const} = 0$
- $\mathrm{Var}\,\xi \geq 0 \ \forall \xi.$
- $\mathrm{Var}\,\xi = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = \mathrm{const}) = 1.$

Опр Случайные величины η и ξ независимы, если $\forall A, B \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\underbrace{\xi \in A, \eta \in B}) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(\eta \in B).$$

$\{\omega : \xi(\omega) \in A, \eta(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B) \subset \Omega$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(A))\,\mathbb{P}(\eta^{-1}(B)).$

То есть, ξ и η — независимы $\Leftrightarrow$ события $\xi^{-1}(A)$ и $\eta^{-1}(B)$ независимы $\forall A, B \subset \mathbb{R}.$

Аналогично определяется независимость в совокупности случ. величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k.$

Пример Монетка, 2 раза. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2),\ \omega_j = 0,1\}$ $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$ $\forall \omega \in \Omega$.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 5, & \omega_1 = 0 \\ 105, & \omega_1 = 1 \end{cases}, \quad \eta(\omega) = \begin{cases} -5, & \omega_2 = 0 \\ 10, & \omega_2 = 1 \end{cases}$$

Упр ξ и η – независимы.

Вопрос: ξ, η – независимы. Верно ли, что $\xi + const, \eta$ – независимы?

$A, B \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\xi + const \in A, \eta \in B) = \mathbb{P}(\xi \in A - const;\ \eta \in B) =$$

$$= \mathbb{P}(\xi \in A - const)\,\mathbb{P}(\eta \in B) = \mathbb{P}(\xi + const \in A)\,\mathbb{P}(\eta \in B).$$

$\boxed{\text{Да}}$

Упр ξ, η – независимы. Верно ли, что $\xi + \eta, \eta$ – независимы?

$\boxed{\text{Нет}}$

Лемма Пусть ξ и η – независимые случайные величины.

$\boxed{\text{(упр)}}$ Тогда

- $\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta$
- $Var(\xi + \eta) = Var\,\xi + Var\,\eta$.

Пример ξ, ξ – не независимы.

$\mathbb{E}\xi^2 \neq (\mathbb{E}\xi)^2$. Равенство достигается $\Leftrightarrow$ $\underset{\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2}{\underset{\parallel}{Var\,\xi}} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = const) = 1$.

Опр Ковариацией случайных величин ξ и η назыв.

$$cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) \underset{\text{упр}}{=} \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta.$$

В частности, $cov(\xi, \xi) = Var\,\xi$.

Коэффициент корреляции: $r_{\xi,\eta} = \dfrac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{Var\,\xi}\sqrt{Var\,\eta}}$.

Утв: 1) ξ, η - независимы $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = r_{\xi,\eta} = 0$.

$\boxed{\cancel{\Leftarrow}}$

2) $|r_{\xi,\eta}| \le 1$, причём $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Д-во: 1) ξ, η - незав. $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta = 0$

$$\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta.$$

$\Leftarrow$ $\boxed{\text{задача}}$ $\boxed{\text{придумать } \xi, \eta \text{, т.ч. } \mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0 \text{, но } \xi \text{ и } \eta \text{ - зависимы.}}$

2) Рассмотрим линейное пр-во H, состоящее из $\boxed{\text{центрированных}}$ случайных величин $f: \Omega \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbb{E}f = 0}$ $\quad f, g \in H$ $\quad \#\Omega < \infty$.

Тогда $\mathrm{cov}(f,g) = \mathbb{E}fg = \sum\limits_{\omega} f(\omega) g(\omega) P(\omega)$ —

— скалярное произведение на H.

Нер-во Коши-Буняковского: $|\mathrm{cov}(f,g)| \le \sqrt{\mathrm{cov}(f,f)}\sqrt{\mathrm{cov}(g,g)}$

$= \sqrt{\mathrm{Var}\, f}\sqrt{\mathrm{Var}\, g}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{|\mathrm{cov}(f,g)|}{\sqrt{\mathrm{Var} f}\sqrt{\mathrm{Var}\, g}}}_{r_{f,g}} \le 1.$$

Выберем $f = \xi - \mathbb{E}\xi$, $g = \eta - \mathbb{E}\eta$.

$\mathrm{cov}(f,g) = \mathrm{cov}(\xi,\eta)$

$\mathrm{Var}\, f = \mathrm{Var}\,\xi$, $\mathrm{Var}\, g = \mathrm{Var}\,\eta$.

$\Rightarrow \boxed{r_{\xi,\eta} = r_{f,g}}$, $\quad |r_{\xi,\eta}| \le 1$.

Остаётся д-ть, что $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \boxed{\xi = a\eta + b}$

$$|r_{f,g}| = 1 \underset{\text{К-Б}}{\Longleftrightarrow} f = ag \Leftrightarrow \xi - \mathbb{E}\xi = a(\eta - \mathbb{E}\eta)$$

$$\xi = a\eta + \underbrace{\mathbb{E}\xi - a\mathbb{E}\eta}_{b}$$

Лекция 4, 24.09.2021

X, Y, т.ч. X, Y — не независимы, но $cov(X,Y)=0$

$\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathbb{P}(1)=\mathbb{P}(2)=\mathbb{P}(3)=\frac{1}{3}$

$X(1)=1$, $X(2)=0$, $X(3)=-1$

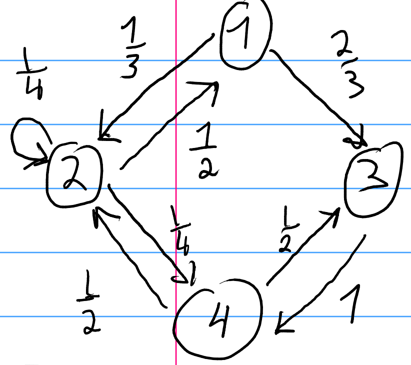
$Y(1)=0$, $Y(2)=1$, $Y(3)=0$.

$cov(X,Y) = \mathbb{E}\underset{0}{XY} - \underset{0}{\mathbb{E}X}\mathbb{E}Y = 0$

$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \mathbb{P}(2) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$k=1$



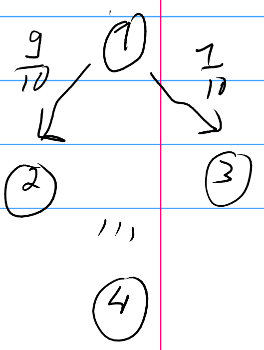
$\mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=2, \xi_0=2) = \mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=2, \xi_0=4) = \mathbb{P}(\xi_2=2 \mid \xi_1=2) = \frac{1}{4}$

$X=\{1,2,3,4\}$.

$P_{12}=\frac{1}{3}$

$P_{32}=0$.

$k=2$



Цепи Маркова

Ингредиенты марковской цепи (МЦ):

- X — мн-во, конечное либо счётное, "мн-во состояний"

$X = \begin{cases} \{1,2,\dots\} \\ \{1,2,\dots,L\} \end{cases}$

- числа $p_k(i,j)$, $i,j \in X$, $k \geq 1$

— "переходная вер-ть из состояния i в состояние j", удовлетворяющие

$p(i,j) \geq 0$ и $\sum_{j\in X} p(i,j) = 1$,

на k-ом шаге.

Опр Если $p_k(i,j)$ не зависят от k, $\forall i,j$, то марковская цепь наз-ся <u>однородной</u>

В случае, когда цепь однородная, будем обозначать

$$P_{ij} := P_k(i,j)$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вер. пр-во

$\Omega = \{\omega = (i_0, i_1, i_2, \dots)$, где $i_k \in X\}$; $\xi_k(\omega) = i_k$

Для тех, у кого не было ТВ: можно думать, что

Ω — не более, чем счётное мн-во, тогда

сигма-ал. $\mathcal{F}$ — мн-во всех подмн-в

Этого будет достаточно для МЦ конечной длины

- случайные величины $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \to X$.

ξ_k — положение "лягушки" в момент времени k (другими словами, после k-го прыжка)

<u>Опр 1</u> Посл-ть случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ образует МЦ с переходными вероятностями $P_k(i,j)$, если $\forall k \geq 1$ выполнено:

1) $\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \xi_{k-2} = i_{k-2}, \dots, \xi_0 = i_0)$

$= \mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1})$, $\forall i_0, \dots, i_k \in X$,

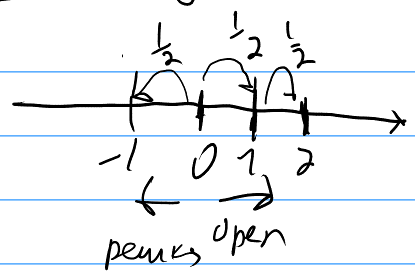
т.ч. $\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \xi_{k-2} = i_{k-2}, \dots, \xi_0 = i_0) \neq 0$.

2) $\mathbb{P}(\xi_k = j \mid \xi_{k-1} = i) = P_k(i,j)$

Прошлого: $\boxed{i_0 \dots i_{k-2}}$ Настоящее: $i_{k-1} \to$ Буд.: i_k

$\boxed{\text{Б зависит от Н, но не зав. от П.}}$

Пример: Случайное блуждание:



ξ_k — положение в момент k

ξ_k — МЦ.

$\mathbb{P}(\xi_0 = 0) = 1.$

$$\mathbb{P}(\xi_2 = 2 \mid \xi_1 = 1, \xi_0 = 0) = \mathbb{P}(\xi_2 = 2 \mid \xi_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Обозначим $p_j^{(0)} := \mathbb{P}(\xi_0 = j)$, $j \in X$.

$p^{(0)} = (p_j^{(0)})_{j \in X}$ — наз-ся начальным распределением (распр-ие случ. вел. ξ_0).

Пример: $p^{(0)} = \left(\overset{\mathbb{P}(\xi_0=1)}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{3}}}, \overset{\mathbb{P}(\xi_0=2)}{\overset{\shortparallel}{\frac{2}{3}}}, 0, 0\right).$ пер. вер-ти как на картинке

$$\mathbb{P}(\xi_0 = 1, \xi_1 = 2, \xi_2 = 2, \xi_3 = 4) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(\xi_3 = 4 \mid \xi_2 = 2, \xi_1 = 2, \xi_0 = 1)}_{= \mathbb{P}(\xi_3 = 4 \mid \xi_2 = 2)} \mathbb{P}(\xi_2 = 2, \xi_1 = 2, \xi_0 = 1)$$

$$= P(2,4)\, \mathbb{P}(\xi_2 = 2 \mid \xi_1 = 2, \xi_0 = 1)\, \mathbb{P}(\xi_1 = 2, \xi_0 = 1) = \ldots =$$

$$= P(2,4)\, P(2,2)\, P(1,2)\, \mathbb{P}(\xi_0 = 1) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{144}.$$

Аналогично можно вычислить вер-ть произвольного пути:

Опр 2 Посл-ть $\xi_0, \xi_1, \dots$ образует МЦ с переходными вер-ми $P_k[i,j]$, если

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_k = i_k) = P^{(0)}_{i_0} P_1(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot P_k(i_{k-1}, i_k)$$

$\forall\, i_0, \dots, i_k \in X$, $\forall k$, где $P^{(0)}_{i_0} = \mathbb{P}(\xi_0 = i_0)$.

Утв 3. Опр 1 и 2 – эквивалентны

Док-во: $1 \Rightarrow 2$ – упражнение

$2 \Rightarrow 1$: $\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi_k = i_k, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0)}{\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0)} =$$

$$= \frac{\cancel{P^{(0)}_{i_0} P_1(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot} P_k(i_{k-1}, i_k)}{\cancel{P^{(0)}_{i_0} P_1(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot P_{k-1}(i_{k-1}, i_k)}} = P_k(i_{k-1}, i_k).$$

$$\mathbb{P}(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}) = \frac{\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \xi_k = i_k)}{\mathbb{P}(\xi_{k-1} = i_{k-1})} \overset{\text{ф-ла полной вер-ти}}{=}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i_0, \dots, i_{k-2} \in X} \{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_k = i_k\}\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i_0, \dots, i_{k-2}} \{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1}\}\right)} =$$

$$= \frac{\sum_{i_0, \dots, i_{k-2}} \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \dots, \xi_k = i_k)}{\sum_{i_0, \dots, i_{k-2}} \mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \dots, \xi_{k-1} = i_{k-1})} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_0,\dots,i_{k-2}} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\dots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1})\, p_k(i_{k-1},i_k)}{\sum\limits_{i_0,\dots,i_{k-2}} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\dots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1})} = p_k(i_{k-1},i_k).$$

ч.т.д.

Замечание 4 Если ф-ла из Опр 2 верна для некоторого k, то она верна для $\forall\, k' < k$.

Д-во: по индукции: $k' = k-1$

$$P(\xi_0=i_0,\dots,\xi_{k-1}=i_{k-1}) = \sum_{i_k\in X} P(\xi_0=i_0,\dots,\xi_{k-1}=i_{k-1},\xi_k=i_k)$$

$$= \sum_{i_k} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\dots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1})\, p_k(i_{k-1},i_k)$$

$$\sum_{i_k\in X} p_k(i_{k-1},i_k) = 1.$$

$$= p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0,i_1)\dots p_{k-1}(i_{k-2},i_{k-1}).$$

ч.т.д.

А только МЦ с заданными $p_k(i,j)$ сущ-ет?!

Построение МЦ для случая конечного времени $k \le T$.

Дано:

$p_k(i,j)$, $i,j\in X$

$p^{(0)}$ — фикс. какое-нибудь.

$\boxed{\text{Нужно построить } \xi_0,\xi_1,\dots,\xi_T}$

Пусть
- $\Omega = \{ \omega = (i_0, i_1, \dots, i_T)$, где $i_k \in X \}$, $\xi_k(\omega) = i_k$.
- $\mathbb{P}(\omega) = p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0, i_1) \dots p_T(i_{T-1}, i_T)$.

Тогда $\xi_0, \dots, \xi_T$ – м.ц. действительно,

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i_0, \dots, \xi_T = i_T) = \mathbb{P}(\omega = (i_0, \dots, i_T)) =$$

$\Rightarrow$ $\xi_0, \dots, \xi_T$ – МЦ по опр 2 + замечанию 4.

Нужно проверить, что $p^{(0)}_i = \mathbb{P}(\xi_0 = i)$.

$$\mathbb{P}(\xi_0 = i) = \mathbb{P}(\omega = (i_0, \dots, i_T) : i_0 = i) =$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_T \in X} p^{(0)}_i p_1(i, i_1) p_2(i_1, i_2) \dots p_T(i_{T-1}, i_T)$$

$$\sum_{i_T} p_T(i_{T-1}, i_T) = 1$$

$$= p^{(0)}_i.$$

$$\sum_{i_{T-1}} p_{T-1}(i_{T-2}, i_{T-1}) = 1.$$

Нужно еще проверить, что $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$.

так

действительно,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i_0, \dots, i_T \in X} p^{(0)}_{i_0} p_1(i_0, i_1) \dots p_T(i_{0}, i_T) = \sum_{i_0} p^{(0)}_{i_0} =$$

$= 1$