

## ЗАДАЧИ 1 СЕТ, 24.09.2021

1. Завершите доказательство эквивалентности двух определений цепей маркова.
2. Пусть последовательность случайных величин  $\xi_0, \dots, \xi_T$  образует марковскую цепь со множеством состояний  $X$ . Докажите, что для любого  $n$  и любых множеств  $A \subset X \times \dots \times X$  ( $T - n$  раз),  $C \subset X \times \dots \times X$  ( $n - 1$  раз) и любого  $a \in X$  выполнено

$$\mathbb{P}((\xi_T, \dots, \xi_{n+1}) \in A | \xi_n = a, (\xi_{n-1}, \dots, \xi_0) \in C) = \mathbb{P}((\xi_T, \dots, \xi_{n+1}) \in A | \xi_n = a).$$

В частности,  $\mathbb{P}(\xi_{n+k} = i | \xi_n = j, (\xi_{n-1}, \dots, \xi_0) \in C) = \mathbb{P}(\xi_{n+k} = i | \xi_n = j)$ .

3. Пусть последовательность случайных величин  $\xi_0, \xi_1, \dots$  образует МЦ. Рассмотрим биекцию  $f : X \mapsto X$ . Верно ли, что последовательность  $f(\xi_0), f(\xi_1), \dots$  образует МЦ? А если не предполагать биективности  $f$ ? Если ответ отрицательный – привести контрпример.
4. Небезызвестно, что математические способности нередко передаются от тестя к зятю.<sup>1</sup> Предположим, что 80% зятьев выпускников матфака также заканчивают матфак, а остальные — мех-мат, 40% зятьев выпускников мех-мата заканчивают мех-мат, а остальные поровну распределяются между матфаком и истфаком (why not!); зятья выпускников истфака же распределяются так: 70% заканчивают истфак, 20% — матфак и 10% мех-мат.
  - 1) Придумайте марковскую цепь, описывающую данный процесс.
  - 2) Найдите вероятность того, что зять зятя выпускника матфака закончит матфак.
  - 3) Найдите ту же вероятность для модифицированной цепи, в которой зять выпускника матфака всегда идет на матфак.

---

<sup>1</sup>Вроде бы, эта поговорка пошла от Пикара, который был зятем Эрмита; google it.