

ЛИСТОК СЕМИНАРОВ 2.

1. Найдите предел последовательности:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2017n+2015}{1+n}$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 7n + 7} - \sqrt{n^2 + 5n + 5}$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n + 7^n}{2} \right)^{1/n}$,
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$.

2. Пусть $y_n \rightarrow A$. Докажите, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + A$ для всякой последовательности $\{x_n\}$.

3. К чему и при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится последовательность $x_n = \frac{n2^n + \alpha^n}{(n+1)2^n + (2n+3)\alpha^n}$?

4. Найдите все последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$. При каких p и q всякая такая последовательность стремится к нулю?

5. Даны N неотрицательных чисел x_1, \dots, x_N . Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + \dots + x_N^n}$.

6. Докажите неравенство Я. Бернулли: $(1+a)^n > 1+na$ при $n \in \mathbb{N}, a > -1$.

7. Найдите предел последовательности a_n : (i) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$;

(ii) $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, a_1 = 1$.

8. Докажите, что число e равно пределу последовательности

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

9. Последовательность чисел a_n стремится к нулю. Доказать, что найдется такая возрастающая к бесконечности последовательность чисел b_n , что $a_n b_n \rightarrow 0$.

10. Общежитие и университет находятся на разных концах одной улицы. Студент вышел из общежития и пошел по прямой к университету. На половине пути он решил вернуться в общежитие и пошел обратно. На полдороге к общежитию он подумал, что хорошо бы все-таки сходить в университет, и пошел к университету. На полпути к университету он опять развернулся к общежитию и т.д. К какой точке улицы будет приближаться студент?