Листок семинаров 3.

1. Приведите пример последовательности, множеством частичных пределов которой является $\{0\} \cup \{1/n\}$.

2. Докажите, что последовательности $\sin n$ и $\sin(n^2)$ не имеют пределов (иррациональность π считается известной).

3. Пусть $a > 0$. Докажите, что последовательность x_n такая, что $x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)$, $x_1 > 0$, сходится к $\sqrt{a}$.

4. Докажите, что последовательность $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n+2}{a_n+3}$ сходится и найдите ее предел.

5. Пусть $p > 1$ и $x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n}, x_1 = 1$. Докажите, что последовательность x_n сходится к положительному корню уравнения $x^p - x - 1 = 0$.

6. Положим

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Докажите, что (a) y_n не убывает, а z_n не возрастает; (b) $z_n - y_n \le 1/n$;

(c) существует число $C > 0$ такое, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \text{ где } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

7. Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины (при котором колода не обваливается). Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

8. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете шнур на 1 км (равномерным растяжением по всей длине, которая в целом увеличивается на 1 км). Доползет ли жук до вашей руки?

9. Пусть $q \in (0,1)$. Исследовать сходимость рядов: a) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{\sqrt{n}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{\ln n}$.

10. Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и $a_n \le c_n \le b_n$. Докажите, что ряд $\sum c_n$ тоже сходится.

11. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. Следует ли из этого, что ряд $\sum b_n$ тоже сходится?

12. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Обязательно ли сходятся ряды $\sum a_n^2$ и $\sum a_n^3$?