Листок 1

ДОП.ГЛАВЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ КАК МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, СПЕЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Докажите формулу Кошуля:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle + Y\langle Z, X\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle - (Z\langle X, Y\rangle - \langle Z, [X, Y]\rangle).$$

2. Докажите, что решение следующей задачи Коши для уравнения геодезических не продливается на весь интервал $(-\infty, +\infty)$. Случай $\dim M = 1$: $\Gamma^1_{11}(x) = -2\operatorname{th} x, t_0 = 0, x(0) = 0, dx(0)/dt = 1$.

3. *(Лемма Гаусса)* Пусть $u \in Dom(\exp_p)$. Докажите, что $\forall v, w \in T_u(T_pM)$ справедливо равенство:

$$\langle v, w\rangle = \langle d_u \exp_p v, d_u \exp_p w\rangle.$$

4. (а) Доказать, что функция $d(p, q) = \inf\{L[\gamma] \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \gamma$ – кусочно-гладкий путь$\}$ превращает риманово многообразие (M, g) в метрическое пространство.

(б) Зафиксируем точку $p \in M$. Докажите, что функция $f(q) = d(p, q)$ является непрерывной функцией от q.

(в) Докажите, что функция $f(q) = d(p, q)$ из предыдущего пункта не является дифференцируемой, однако её квадрат является дифференцируемой функцией q.

5. *(Координаты Ферми)* Пусть $\gamma\colon [0, s] \to M$ – геодезическая, параметризованная натуральным параметром t. Пусть $E_1, \dots, E_n$ – параллельные векторные поля, образующие в начальной (а потому и в любой) точке $\gamma(t)$ ортонормированный базис. Возьмём $E_1(t) = \gamma'(t)$. Рассмотрим окрестность отрезка $x^1 = x^2 = \ldots = x^{n-1} = 0,\ 0 \leqslant x^n \leqslant s$ в $\mathbb{R}^n$. Определим отображение h по формуле:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \exp_{\gamma(x^n)} \sum_{i=1}^{n-1} x^i E_i.$$

Докажите, что h задаёт координаты в трубчатой окрестности геодезической γ (нужно проверить, что dh невырождено). Покажите, что в этих координатах

$$g_{ij}(0, \dots, 0, x^n) = \delta_{ij}, \quad \Gamma^k_{ij}(0, \dots, 0, x^n) = 0.$$

6. *(Экспоненциальное отображение подмногообразия)* Пусть $M \subset (\bar{M}, \bar{g})$ – подмногообразие. Пусть $\nu_\alpha \in \Gamma(U, NM)$ – локальное сечение нормального расслоения. Определим экспоненциальное отображение M как $\exp_M(p, \nu(p)) = \exp_p \nu(p)$, где $p \in M$. Докажите, что в окрестности нулевого сечения $M \times \{0\}$ нормального расслоения отображение $\exp_M$ является диффеоморфизмом.