ЛИнЕЙноЕ проГрАММИроВАнИЕ

А.В. Колесников

Содержание

1. Линейное программирование. Классические задачи линейного программирования. Полиэдры и метод исключения переменных. 2
1.1. Постановка задачи. 2
1.2. Классические задачи линейного программирования 2
1.3. Элементы теории многогранников 4
2. Многранники, полиэдры, конусы. Теорема о линейных неравенствах. Лемма Фаркаша. 8
3. Приложения леммы Фаркаша: Теорема Хана–Банаха об отделимости и теорема Хелли для многогранников. 11
4. Двойственность в линейном программировании. 12
Список литературы 15

1. Линейное программирование. Классические задачи линейного программирования. Полиэдры и метод исключения переменных.

1.1. **Постановка задачи.** Задача линейного програмирования: поиск максимума (минимума) линейной функции на множестве, заданном системой линейных ограничений (равенств или неравенств).

Пример 1.1. *([5])*

$$x + y \to \min$$

Функция $x+y$ называется **целевой** *(objective function).*

$$x + 2y \geq 3$$

$$2x + y \geq 5$$

$$y \geq 0$$

Точка (x, y), удовлетворяющая системе неравенств выше, называется **допустимой** *(feasible). Система неравенств задает* **полиэдр**.

Минимум целевой функции достигается в одной из вершин полиэдра $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}), (3, 0)$. Непосредственно проверяется, что решением является точка $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$.

1.2. **Классические задачи линейного программирования.**

Пример 1.2. Задача о диете. *Дано m видов пищи $F_1, \cdots, F_m$, каждый вид содержит n питательных веществ $N_1, \cdots, N_n$. Пусть c_j — необходимая дневная порция j-го вещества, b_i — цена за единицу F_i, a_{ij} — количество N_j в F_i.*

Пусть y_i — дневное количество приобретаемого F_i. Надо составить рацион с минимальными затратами, покрывающий необходимую дневную порцию. Формальная постановка:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} y_k \geq c_j,$$

$$y_k \geq 0, \ 1 \leq k \leq m.$$

Пример 1.3. Транспортная задача. *Имеется n пунктов производства P_i и m пунктов назначения M_j некоторого товара. Стоимость перевозки единицы товара из P_i в M_j равна c_{ij}. Пункт P_i обладает s_i единицами этого товара, а пункт M_j нуждается в r_j единицах. Необходимо минимизировать общую стоимость перевозки*

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j} x_{ij} \leq s_i,$$

$$\sum_{i} x_{ij} \geq r_j,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример 1.4. The Activity Analysis Problem. *Имеется n различных видов деятельности A_j, практикуемых в некоторой компании, и m ресурсов, необходимых для этих видов деятельности (время, материальные ресурсы и пр.). Пусть ресурс R_i доступен в количестве b_i. Пусть также ресурс R_i используется в количестве a_{ij} в деятельности A_j на единицу интенсивности. Соответственно, c_j — общая ценость для компании от оперирования единицей интенсивности A_j, а x_j — количество таких единиц.*

Необходимо максимизировать

$$\sum_j c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i,$$

$$x_j \geq 0.$$

Пример 1.5. Задача оптимального назначения. *Дано: I людей, способных совершить J работ. Ценность j-й работы, совершаемой i-ом человеком равна a_{ij}. Надо распределить работы между людьми, чтобы максимизировать ценность.*

$$\sum_{ij} a_{ij} x_{ij} \to \max$$

$$\sum_i x_{ij} \leq 1,$$

$$\sum_j x_{ij} \leq 1,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример 1.6. Задача коммивояжера. *Дан полный граф K_n с n вершинами, в котором задана длина l_i каждого ребра. Путь, обходящий все вершины по одному разу, мы будем называть маршрутом. Необходимо найти кратчайший маршрут в графе.*

Произвольный маршрут коммивояжера можно рассматривать как подмножество ребер графа. Любое подмножество ребер можно представить как подмножество множества $\{0,1\}^{\binom{n}{2}} \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$, где $0/1$ указывает на принадлежность ребра маршруту. В $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ рассмотрим многогранник коммивояжера Q, определяемый как выпуклая оболочка точек $\{0,1\}^{\binom{n}{2}}$, которые являются маршрутом. Вершины многогранника находятся в однозначном соответствии со всеми маршрутами на графе. Рассмотрим теперь линейную функцию в $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$:

$$l(x) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} l_i x_i.$$

Максимум l достигается в точности в одной из вершин многогранника. Поэтому задача коммервояжера сводится к задаче линейного программирования.

Далее неравенство $a \leq b$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$ понимается покоординатно :

$$a_i \leq b_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Определение 1.7. Стандартная форма задачи линейного программирования на максимум. *Переменная x принадлежит пространству $\mathbb{R}^n$. Задан вектор $c \in \mathbb{R}^n$, линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$. Изучается задача*

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max .$$

при ограничениях

$$Ax \leq b,$$
$$x_i \geq 0,\ \forall 1 \leq i \leq n.$$

Стандартная форма задачи линейного программирования на минимум. *В тех же обозначениях, что и выше, изучается задача*

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min .$$

при ограничениях

$$Ax \geq b,$$
$$x_i \geq 0,\ \forall 1 \leq i \leq n.$$

1.3. **Элементы теории многогранников.** Материал: [3], Глава 0.

Определение 1.8. Выпуклое множество. *Множество M называется выпуклым, если для всех $x, y \in M$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ выполнено $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$.*

Определение 1.9. Выпуклая оболочка. *Выпуклой оболочкой*

$$\mathrm{conv}(M)$$

множества M называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M.

Определение 1.10. Полиэдр. *Полиэдром называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств. $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ — матрица, $z \in \mathbb{R}^m$*

$$P = P(A, z) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon Ax \leq z\}.$$

Ниже даны два определения многогранника (мы увидим, что они эквивалентны).

Определение 1.11. Многогранник 1. *Многогранником называется ограниченный полиэдр.*

Определение 1.12. Многогранник 2. *Многогранником называется выпуклая оболочка конечного числа точек.*

Определение 1.13. Грани многраннника. *Гранью многогранника называется такое пересечение многогранника с гиперплоскостью, при котором он весь полностью лежит в одном из замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью.*

Вершины, ребра и гиперграни считаются гранями, а также сам многогранник и пустое множество.

Определение 1.14. Конус. *Множество, содержащее с любым конечным набором точек $\{x_i\} \subset M$ все их линейные комбинации $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n, t_i \geq 0$ с неотрицательными коэффициентами, называется конусом.*

Определение 1.15. Коническая оболочка. *Конической оболочкой*

$$\mathrm{cone}(M)$$

множества M называется пересечение всех конусов, содержащих M.

Следующий результат дает точное описание проекции полиэдра.

Теорема 1.16. (Метод Фурье-Моцкина исключения переменных.) *Пусть* $P = P(A, z) \subset \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $z \in \mathbb{R}^m$ *и пусть выбрано число* $k \le d$. *Построим матрицу* $A^{/k} \subset \mathbb{R}^{n'\times d}$, *строками которой являются*

- *строки* $\mathbf{a}_i$ *матрицы* A, *для которых* $a_{ik} = 0$
- *суммы* $a_{ik}\mathbf{a}_j + (-a_{jk})\mathbf{a}_i$ *для всех пар* i, j, *для которых* $a_{ik} > 0, a_{jk} < 0$,

и пусть $z^{/k} \in \mathbb{R}^{m'}$ — *соответствующий вектор-столбец с коэффициентами*

- z_i *для всех* i, *для которых* $a_{ik} = 0$, *и*
- $a_{ik}z_j + (-a_{jk})z_i$ *для всех пар* i, j, *для которых* $a_{ik} > 0, a_{jk} < 0$.

Тогда

$$proj_k(P) = P(A^{/k}, z^{/k}) \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_k = 0\}.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{P}_k$ — множество, полученное умножением $proj_k(P)$ на k-ю ось координат. Так как P описывается системой неравенств $\mathbf{a}_i x \le z_i$, очевидно, те строки $\mathbf{a}_i$ матрицы A, которые не содержат переменной x_k (т.е. $a_{ik} = 0$), описывают также ограничения для множества $\tilde{P}_k$.

Рассмотрим теперь пару строк $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$, где $a_{ik} > 0$, $a_{jk} < 0$. Запишем ограничения $\le z_i$, $\langle \mathbf{a}_j, x\rangle \le z_j$ в виде

$$x_k \le \frac{1}{a_{ik}}\Big(z_i + a_{ik}x_k - \langle \mathbf{a}_i, x\rangle\Big) \tag{1}$$

$$x_k \ge \frac{1}{-a_{jk}}\Big(-a_{jk}x_k + \langle \mathbf{a}_j, x\rangle - z_j\Big). \tag{2}$$

Заметим, что правые части обоих неравенств не содержат переменную x_k. Точка $\hat{x}_k = (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$ тогда и только тогда принадлежит $proj_k(P)$, когда найдется такое число x_k, что $\hat{x}_k, x_k$ удовлетворяют неравенствам (1), (2) для всех i, j со свойствами $a_{ik} > 0, a_{jk} < 0$. Для существования такого x_k необходимо и достаточно, чтобы для всех таких пар i, j было выполнено неравенство

$$\frac{1}{-a_{jk}}\Big(-a_{jk}x_k + \langle \mathbf{a}_j, x\rangle - z_j\Big) \le \frac{1}{a_{ik}}\Big(z_i + a_{ik}x_k - \langle \mathbf{a}_i, x\rangle\Big).$$

Последнее эквивалентно неравенству

$$a_{ik}\langle \mathbf{a}_j, x\rangle + (-a_{jk})\langle \mathbf{a}_i, x\rangle \le a_{ik}z_j + (-a_{jk})z_i. \tag{3}$$

Таким образом, системы неравенств (3) задают множество $\tilde{P}_k$. Теорема доказана. □

Следствие 1.17. *Проекцией полиэдра является полиэдр.*

Примеры взяты из
http://www.cs.cmu.edu/ odonnell/toolkit13/lecture13-anonymous.pdf
http://community.wvu.edu/ krsubramani/courses/sp01/approx/qen/n2.pdf

Пример 1.18. *Рассмотрим систему неравенств с 3 переменными и 5 ограничениями:*

$$\begin{cases} x - 5y + 2z \ge 7, \\ 3x - 2y - 6z \ge -12, \\ -2x + 5y - 4z \ge -10, \\ -3x + 6y - 3z \ge -9, \\ -10y + z \ge -15. \end{cases}$$

Проверим, что данная система имеет решение, используя элиминацию Фурье-Моцкина.

Первым шагом исключим переменную x. Для этого умножим каждое неравенство на положительный коэффициент, чтобы коэффициент при x в каждом неравенстве оказался равен -1, 1 или 0. Получим следующую эквивалентную систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 5y + 2z \geq 7, \\ x - \frac{2}{3}y - 2z \geq -4, \\ -x + \frac{5}{2}y - 2z \geq -5, \\ -x + 2y - z \geq -3, \\ -10y + z \geq -15. \end{cases}$$

После этого запишем неравенства в виде $x \geq c_i y + d_i z + e_i$ или $x \leq c_i y + d_i z + e_i$ в зависимости от того, равен коэффициент перед x 1 или -1:

$$\begin{cases} x \geq 5y - 2z + 7, \\ x \geq \frac{2}{3}y + 2z - 4, \\ x \leq \frac{5}{2}y - 2z + 5, \\ x \leq 2y - z + 3, \\ -10y + z \geq -15. \end{cases}$$

Для каждой пары неравенств вида $x \geq c_i y + d_i z + e_i$ и $x \leq c_j y + d_j z + e_j$ мы получаем ограничение $c_j y + d_j z + e_j \geq c_i y + d_i z + e_i$, не содержащее x. Все такие ограничения, а также исходные неравенства, не содержащие x, задают проекцию многогранника допустимых решений на плоскость переменных y и z:

$$\begin{cases} \frac{5}{2}y - 2z + 5 \geq 5y - 2z + 7, \\ 2y - z + 3 \geq 5y - 2z + 7, \\ \frac{5}{2}y - 2z + 5 \geq \frac{2}{3}y + 2z - 4, \\ 2y - z + 3 \geq \frac{2}{3}y + 2z - 4, \\ -10y + z \geq -15. \end{cases}$$

Теперь исключим переменную z. Система неравенств выше эквивалентна следующей (порядок неравенств сохранен):

$$\begin{cases} \frac{5}{2}y \leq -2, \\ z \geq 3y + 4, \\ z \leq \frac{11}{24}y + \frac{9}{4}, \\ z \leq \frac{4}{9}y + \frac{7}{3}, \\ z \geq 10y - 15. \end{cases}$$

После исключения переменной z получаем проекцию многогранника на ось Oy:

$$\begin{cases} \frac{5}{2}y \leq -2, \\ \frac{11}{24}y + \frac{9}{4} \geq 3y + 4, \\ \frac{4}{9}y + \frac{7}{3} \geq 3y + 4, \\ \frac{11}{24}y + \frac{9}{4} \geq 10y - 15, \\ \frac{4}{9}y + \frac{7}{3} \geq 10y - 15, \end{cases} \iff \begin{cases} y \leq -\frac{4}{5}, \\ y \leq -\frac{42}{61}, \\ y \leq -\frac{15}{23}, \\ y \leq \frac{414}{229}, \\ y \leq \frac{78}{43}, \end{cases} \iff y \leq -\frac{4}{5}.$$

Проекция многогранника – непустое множество, а значит система неравенств имеет решение.

Пример 1.19. *Решите задачу линейного программирования методом Фурье-Моцкина.*

$$\begin{aligned} 2x+3y &\to \max, \\ x-2y &\le 4, \\ 2x+y &\le 18, \\ y &\le 10, \\ x,y &\ge 0. \end{aligned}$$

Указание: введите дополнительную переменную z *и ограничение* $z \le 2x+3y$. *После этого найдите проекцию многогранника*

$$\begin{cases} z \le 2x+3y, \\ x-2y \le 4, \\ 2x+y \le 18, \\ y \le 10, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \end{cases}$$

на ось Oz. *Максимальное значение* z *на данной проекции и будет ответом в исходной задаче. Сначала исключим переменную* x:

$$\begin{cases} z \le 2x+3y, \\ x-2y \le 4, \\ 2x+y \le 18, \\ y \le 10, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ x \le 2y+4, \\ x \le -\frac{1}{2}y+9, \\ y \le 10, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2y+4 \ge 0, \\ -\frac{1}{2}y+9 \ge 0, \\ 2y+4 \ge -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ -\frac{1}{2}y+9 \ge -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ y \le 10, \\ y \ge 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y+4 \ge -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ -\frac{1}{2}y+9 \ge -\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ y \le 10, \\ y \ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y \ge \frac{1}{7}z-\frac{8}{7}, \\ y \ge \frac{1}{2}z-9, \\ y \le 10, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Исключим переменную y:

$$\begin{cases} y \ge \frac{1}{7}z-\frac{8}{7}, \\ y \ge \frac{1}{2}z-9, \\ y \le 10, \\ y \ge 0. \end{cases} \implies \begin{cases} 10 \ge \frac{1}{7}z-\frac{8}{7}, \\ 10 \ge \frac{1}{2}z-9, \\ 10 \ge 0. \end{cases} \iff \begin{cases} z \le 78, \\ z \le 38, \end{cases} \iff z \le 38.$$

Следовательно, 38 – максимальное значение целевой функции.

2. Многранники, полиэдры, конусы. Теорема о линейных неравенствах. Лемма Фаркаша.

Определение 2.1. Сумма Минковского. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — два множества. Их суммой Минковского $A+B$ называется множество*

$$A + B = \{x + y,\ x \in A, y \in B\}.$$

Пример 2.2. *Найдите суммы Минковского следующих множеств:*

- $A = \{x \in [0,1], y = 0\} \subset \mathbb{R}^2, A = B$
- $A = \{x \in [0,1], y = 0\} \subset \mathbb{R}^2,\ A = \{y \in [0,1], x = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
- $A = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2, B = \{x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2.$

Теорема 2.3. *Пусть $V = \{v_1, \cdots, v_k\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$ — конечные множества. Если множество M является суммой Минковского*

$$M = \mathrm{cone}(Y) + \mathrm{conv}(V), \tag{4}$$

то оно является полиэдром.

Доказательство. Множество M является проекцией множества

$$M' = \Bigl\{(x,t,s) : x = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i + \sum_{i=1}^{m} s_j y_j,\ v_i \in V, y_j \in Y, t_i \ge 0, s_j \ge 0, \sum_{i=1}^{k} t_i = 1\Bigr\} \subset \mathbb{R}^{n+m+k}.$$

Результат следует из того, что M', очевидно, полиэдр, и из того, что проекция полиэдра является полиэдром. □

Отступление: теория смешанных объемов.

Следующий фундаментальный результат получен Минковским. Он лежит в основе теории смешаных объемов, богатой результатами и важной теории, оказавшей большое влияние на математику двадцатого века. С этой ней можно познакомиться по книге Р. Шнайдера "Выпуклые тела: теория Брунна–Минковского".

Теорема 2.4. *Пусть $K_1, \cdots, K_n$ — непустые компактные выпуклые тела. Тогда имеет место представление*

$$\mathrm{Vol}(t_1 K_1 + t_2 K_2 + \cdots + t_n K_n) = \sum_{i_1, \cdots i_n = 1}^{n} V(K_{t_1}, \cdots, K_{t_n}) t_{i_1} \cdots t_{i_n}$$

для всех $t_i \ge 0$, где величины $V(K_{t_1}, \cdots, K_{t_n})$ называются смешанными объемами $K_{t_1}, \cdots, K_{t_n}$.

Лемма 2.5. *Пусть C — полиэдральный конус, т.е. конус вида*

$$C = P(A, 0).$$

Тогда $C = \mathrm{cone}(V)$ для некоторого конечного множества V.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a_i}$ — строки матрицы A. Рассмотрим конус $C' = \mathrm{cone}(\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n})$. Так как каждый конечнопорожденный конус является полиэдром, то

$$C' = \{x : \langle b_1, x\rangle \le 0, \cdots, \langle b_m, x\rangle \le 0\}$$

для некоторого набора векторов $\{b_1, \cdots, b_m\}$. Докажем, что C совпадает с

$$\mathrm{cone}(b_1, \cdots b_m).$$

Действительно, поскольку $\langle b_i, \mathbf{a_j}\rangle \le 0$, то $b_i \in C$ для любого i, следовательно

$$\mathrm{cone}(b_1, \cdots b_m) \subset C.$$

Пусть $y \notin \operatorname{cone}(b_1, \cdots b_m), y \in C$. Так как $\operatorname{cone}(b_1, \cdots b_m)$ является полиэдром $P(A', 0)$, то найдется такая строка ω матрицы A', что $\langle b_i, \omega\rangle \leq 0$ и $\langle \omega, y\rangle > 0$. Но тогда $\omega \in C' = \operatorname{cone}(\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n})$ и $\langle \omega, x\rangle \leq 0$ для всех $x \in C$, что противоречит условию $\langle \omega, y\rangle > 0$. □

Теорема 2.6. *Любой полиэдр представляется в виде (4).*

Доказательство. Рассмотрим полиэдр $P = P(A, z)$. По предыдущей лемме полиэдральный конус

$$K = \{(x, \lambda) : x \in \mathbb{R}^n, \lambda \geq 0, Ax - \lambda z \leq 0\}.$$

порожден конечным набором векторов $(b_i, \lambda_i), 1 \leq i \leq m$. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_i \in \{0, 1\}$. Положим

$$Q = \operatorname{conv}(b_i : \lambda_i = 1),$$

$$C = \operatorname{cone}(b_i : \lambda_i = 0).$$

Очевидно, $x \in P$ тогда и только тогда, когда $(x, 1) \in K$, т.е.

$$(x, 1) \in \operatorname{cone}((b_1, \lambda_1), \cdots, (b_m, \lambda_m)).$$

Следовательно, $P = Q + C$. □

Следствие 2.7. *Два определения многогранника равносильны, т.е. множество ограниченных полиэдров совпадает со множеством выпуклых оболочек конечного числа точек.*

Теорема 2.8. (Основная теорема о линейных неравенствах). *Пусть $a_1, \cdots, a_m, b$ — векторы в $\mathbb{R}^n$. Имеет место следующая альтернатива.*

(1) *Вектор b является неотрицательной линейной комбинацией*

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \ \lambda_i \geq 0$$

некоторого множества линейно независимых векторов из $\{a_1, \cdots, a_m\}$

(2) *Найдется такая гиперплоскость $\{x : \langle c, x\rangle = 0\}, c \in \mathbb{R}^n$, содержащая $t - 1$ линейно независимых векторов из $\{a_1, \cdots, a_m\}$, где $t = \operatorname{rank}\{a_1, \cdots, a_m, b\}$, что*

$$\langle c, b\rangle < 0, \ \langle c, a_i\rangle \geq 0, \ \forall\ 1 \leq i \leq m.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\{a_1, \cdots, a_m\}$ порождают все линейное пространство $\mathbb{R}^n$. Заметим, что условия (1) и (2) исключают друг друга. Действительно, пусть выполнено соотношение

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \ \lambda_i \geq 0.$$

Возьмем скалярное произведение с c. Получим

$$\langle c, b\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle c, a_i\rangle.$$

Очевидно, это противоречит (2).

Покажем, что по крайней мере одно из условий (1), (2) выполнено. Выберем базис $D_1 = \{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\}$ в $\{a_1, \cdots, a_m\}$ и применим следующий итеративный процесс.

(1) Разложим b по базису $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\}$. Если все коэффициенты в разложении неотрицательны, то мы в ситуации (1).

(2) В противном случае выберем наименьшее k среди $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\}$ с отрицательным коэффициентом λ_k. Пусть $\{x\colon \langle c, x\rangle = 0\}$ — гиперплоскость, содержащая $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\} \setminus a_k$, при этом $\langle c, a_k\rangle = 1$ (отсюда следует, что $\langle c, b\rangle = \lambda_k < 0$).
(3) Если $\langle c, a_i\rangle \geq 0$ для всех $1 \leq i \leq m$, то выполнено (2).
(4) Если нет, то выберем наименьшее s, для которого $\langle c, a_s\rangle < 0$. И заменим D_1 на $D_2 = D_1 \setminus \{a_k\} \cup \{a_s\}$. Очевидно, D_2 — новый базис. Начнем итерацию снова.

Достаточно доказать, что процесс остановится. Если это не так, то из конечности множества базисов вытекает, что

$$D_a = D_b$$

для некоторых $a < b$.

Пусть r — максимальный из номеров $\{1, \cdots, m\}$, для которого вектор a_r выводился из какого-либо из множеств $D_a, \cdots, D_{b-1}$ на шаге (4). Пусть это множество D_p. С другой стороны, так как $D_a = D_b$, то этот вектор вводился в некоторое множество D_q, $p < q$. Таким образом,

$$D_p \cap \{a_{r+1}, \cdots, a_m\} = D_q \cap \{a_{r+1}, \cdots, a_m\}. \tag{5}$$

Разложим b по базису $D_p = \{a_{j_1}, \cdots, a_{j_n}\}$

$$b = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j_k} a_{j_k}.$$

и умножим на вектор c_q из пункта (2) итерации D_q. Тогда, с одной стороны, по построению $\langle c_q, b\rangle < 0$. С другой стороны, это противоречит тому, что $\lambda_{j_k}\langle c_q, a_{j_k}\rangle \geq 0$ для всех $1 \leq k \leq n$. Докажем последнее утверждение.

Действительно, так как a_r выводится из D_p, то $\lambda_{i_j} \geq 0$ для всех $i_j < r$. Кроме того, так как a_r вводится в D_q, то $\langle c_q, a_{i_j}\rangle > 0$. Поэтому $\lambda_{i_j}\langle c_q, a_{i_j}\rangle \geq 0$ для всех $i_j < r$.

По тем же соображениям $\lambda_{i_j} < 0$, $\langle c_q, a_{i_j}\rangle < 0$, если $i_j = r$.

Если $i_j > r$, то $\langle c_q, a_{i_j}\rangle = 0$ в силу (2) и (5). □

Следствие 2.9. (Теорема Каратеодори) *Если $C = \operatorname{cone}(X)$ для некоторого множества $X \subset \mathbb{R}^n$, то для любого $x \in X$ найдутся такие линейно независимые векторы $x_1, \cdots, x_m$, что $x \in \operatorname{cone}(x_1, \cdots, x_m)$*

Лемма 2.10. (Лемма Фаркаша 1) *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$. Существование неотрицательного $x \geq 0$ решения уравнения $Ax = b$ равносильно тому, что $\langle y, b\rangle \geq 0$ для любого вектора y, удовлетворяющего условию $A^T y \geq 0$.*

Доказательство. Для доказательства необходимости умножим соотношение $Ax = b$ скалярно на y. Получаем

$$\langle y, b\rangle = \langle y, Ax\rangle = \langle A^T y, x\rangle \geq 0.$$

Докажем достаточность от противного. Пусть не существует $x \geq 0$, для которого $Ax = b$ имеет решение. Это значит, что b не принадлежит конусу $\operatorname{cone}(\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n})$, где $\mathbf{a_i}$ — столбцы матрицы A. Но тогда по теореме 2.8 существует y со свойством $\langle y, b\rangle < 0$, при этом $A^T y \geq 0$. □

Замечание 2.11. *Геометрически лемма Фаркаша означает, что если b не принадлежит конусу, порожденному $\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n}$, то существует гиперплоскость, отделяющая b от этого конуса. Здесь имеется связь с теоремой Хана–Банаха, которую мы обсудим позже.*

Следствие 2.12. (Лемма Фаркаша 2). *Разрешимость системы линейных неравенств $Ax \leq b$ эквивалентно тому, что $\langle b, y\rangle \geq 0$ для любого $y \geq 0$ со свойством $A^T y = 0$.*

Доказательство. Если существует x со свойством $Ax \leq b$, то умножая неравенство на $y \geq 0$ со свойством $A^T y = 0$, легко получаем $\langle b, y\rangle \geq 0$.

Для доказательства в обратную сторону рассмотрим матрицу A' размера $3n \times m$

$$A' = [IA - A].$$

Множество векторов y со свойством $(A')^T y \geq 0$ очевидно, удовлетворяет соотношению $y \geq 0$ и $A^T y = 0$. Поэтому в силу предыдущей версии леммы Фаркаша уравнение $A'x' = b$ имеет решение x' в неотрицательных переменных

$$x' = (x_1, x_2, x_3),\ x_i \in \mathbb{R}^n,\ x_i \geq 0.$$

Это значит

$$b = x_1 + A(x_2 - x_3) \geq A(x_2 - x_3).$$

Вектор $x_2 - x_3$ является искомым решением. □

Замечание 2.13. *Доказательство леммы Фаркаша методом исключения переменных можно найти в* [3] *(параграф 1.4.).*

3. Приложения леммы Фаркаша: Теорема Хана–Банаха об отделимости и теорема Хелли для многогранников.

Мы обсудим связь леммы Фаркаша с некоторыми классическими результатами выпуклого анализа. Одним из таких результатов является теорема Хана–Банаха. Ее геометрический вариант известен как теорема об отделимости, которую мы выведем (в частном случае многогранников) из леммы Фаркаша в конечномерном случае.

Теорема 3.1. Теорема об отделимости для многогранников. *Пусть A, B — многогранники, которые не пересекаются. Тогда существует такая аффинная функция l, что $l_A \geq 1$, $l_B \leq -1$.*

Доказательство. Так как многогранники являются выпуклыми оболочками конечного числа точек

$$A = \mathrm{conv}(a_1, \cdots, a_m),\ B = \mathrm{conv}(b_1, \cdots, b_k),$$

то задача сводится к решению системы аффинных неравенств

$$l(a_i) \geq 1,\ l(b_j) \leq -1,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq k$$

относительно l. Из леммы Фаркаша следует, что если система аффинных неравенств $L_i(x) \geq 0$ не имеет решения, то существуют такие неотрицательные числа q_i, что $\sum_i q_i L_i = -1$ (докажите!). Отсюда следует, что если решения не существует,то для некоторых неотрицательных чисел q_i, r_j со свойствами

$$\sum_{i=1}^{m} q_i(l(a_i) - 1) + \sum_{j=1}^{k} r_j(-l(b_j) - 1) = -1$$

для всех l. В частности, отсюда сразу вытекает (если взять за l произвольную константу), что

$$\sum_i q_i = \sum_j r_j = \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности l

$$\sum_{i=1}^{m} 2q_i a_i = \sum_{j=1}^{k} 2r_j b_j.$$

Но левая часть принадлежит A, а правая B. Мы получаем, что пересечение A и B непусто. $\square$

Теорема 3.2. Теорема об отделимости: общий случай. *Пусть A, B — компактные выпуклые тела, которые не пересекаются. Тогда существует такая аффинная функция l, что $l_A \geq 1$, $l_B \leq -1$.*

Теорема 3.3. (Теорема Хелли) *Пусть $B_1, \cdots, B_m \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые тела, $m > n$. Если любые $n+1$ из этих тел имеют непустое пересечение, то все тела имеют общую точку.*

Доказательство. Ограничимся случаем полиэдров. Так как каждый полиэдр является пересечением конечного числа полупространств, то теорему достаточно доказывать для случая, когда тела являются полупространствами. В этом случае пустота пересечения B_i эквивалентна тому, что соответствующая система линейных неравенств

$$\langle l_i, x \rangle \geq c_i$$

не имеет решения. В этом случае в силу варианта леммы Фаркаша (см. доказательство предыдущей теоремы) вектор $(0, 0, \cdots, 0, -1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами векторов (l_i, c_i). В силу теоремы Каратеодори существует не более чем $n+1$ векторов из этого набора, для которых некоторая линейная комбинацией с неотрицательными коэффициентами равна $(0, 0, \cdots, 0, -1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Применяя опять лемму Фаркаша, получаем, что пересечение соответствующих полупространств пусто. $\square$

4. Двойственность в линейном программировании.

Рассмотрим следующий пример

$$x_1 + x_2 \to \max$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

Очевидно, линейная комбинация трех последних неравенств с неотрицательными коэффициентами y_1, y_2, y_3 приводит к следующему неравенству

$$(y_1 + 4y_2 - y_3)x_1 + (2y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 \leq 4y_1 + 12y_2 + y_3.$$

Будем подбирать y_i таким образом, чтобы коэффициенты при x_i мажорировали коэффициенты целевой функции $x_1 + x_2$:

$$1 \leq y_1 + 4y_2 - y_3$$

$$1 \leq 2y_1 + 2y_2 + y_3.$$

При этих условиях мы получим

$$x_1 + x_2 \leq (y_1 + 4y_2 - y_3)x_1 + (2y_1 + 2y_2 + y_3)x_2 \leq 4y_1 + 12y_2 + y_3.$$

Таким образом, с исходной задачей естественно связана другая задача линейного программирования

$$4y_1 + 12y_2 + y_3 \to \min$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$
$$y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$
$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1.$$

Из выкладок легко следует следующее наблюдение: **значение целевой функции в задаче на максимум в любой допустимой точке x никогда не превосходит значение целевой функции в задаче на минимум в любой допустимой точке y.**

В частности, **если на некоторых допустимых точках x^*, y^* значения целевых функций совпадают, то x^*, y^* являются решениями**.

Исходная задача легко решается вручную: $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$. Значение целевой функции равно $\frac{10}{3}$. В задаче на минимум точка

$$y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{6},\ y_3 = 0$$

является допустимой и значение целевой функции равно $\frac{10}{3}$. Следовательно, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$ является решением.

Этот пример показывает, что с задачей линейного программирования (**прямая задача**)

$$\langle c, x\rangle \to \max$$
$$Ax \leq b,\ x \geq 0$$

естественно связана (**двойственная задача**)

$$\langle b, y\rangle \to \min$$
$$A^T y \geq c,\ y \geq 0.$$

Обобщая рассуждения выше мы легко получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть x^*, y^* — допустимые точки в прямой и двойственной задачах линейного программирования. Тогда*

$$\langle c, x^*\rangle \leq \langle b, y^*\rangle.$$

Если

$$\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle,$$

то x^*, y^* — решения прямой и двойственной задачи линейного программирования.

Таким образом, для прямой и двойственной задачи линейного программирования выполнено сооотношение

$$\sup_{Ax\leq b,\ x\geq 0} \langle c, x\rangle \leq \inf_{A^T y \geq c,\ y\geq 0} \langle b, y\rangle.$$

Оказывается, что при широких предположениях имеет место точное равенство.

Лемма 4.2. *Имеет место равенство*

$$\max_{\{Ax\leq b\}} \langle c, x\rangle = \min_{\{A^T y = c, y\geq 0\}} \langle b, y\rangle$$

если множества $\{Ax \leq b\}$, $\{A^T y = c, y \geq 0\}$ непусты.

Доказательство. Стандартным образом доказывается, что $\max \le \min$.

Для доказательства обратного неравенства надо доказать существование x и $y \ge 0$ со свойствами

$$Ax \le b,\ y \ge 0,\ A^T y = c,\ \langle c, x\rangle \ge \langle b, y\rangle.$$

Это эквивалентно условиям

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -c & b \\ 0 & A^T \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \\ -c \end{pmatrix}$$

В силу леммы Фаркаша эти условия эквивалентны тому, что для переменных

$$u \ge 0, \lambda \ge 0, v \ge 0, \omega \ge 0,$$

удовлетворяющих условиям

$$A^T u - \lambda c = 0,$$

$$\lambda b + A(v - \omega) \ge 0,$$

выполнено

$$\langle u, b\rangle + \langle c, v - \omega\rangle \ge 0.$$

Действительно, если $\lambda > 0$, то

$$\langle u, b\rangle = \lambda^{-1}\lambda\langle u, b\rangle \ge \lambda^{-1}\langle A(\omega - v), u\rangle = \langle \omega - v, c\rangle.$$

Если $\lambda = 0$, то в силу существования x_0, y_0 со свойством

$$Ax_0 \le b,\ y_0 \ge 0,\ A^T y_0 = c$$

получаем

$$\langle u, b\rangle \ge \langle u, Ax_0\rangle = 0 \ge \langle A(\omega - v), y_0\rangle = \langle c, \omega - v\rangle.$$

□

Теорема 4.3. *Пусть множества допустимых значений обеих задач*

$$\{Ax \le b, x \ge 0\},\ \{A^T y \ge c, y \ge 0\}$$

непусты. Тогда

$$\max_{\{Ax \le b, x \ge 0\}} \langle c, x\rangle = \min_{\{A^T y \ge c, y \ge 0\}} \langle b, y\rangle.$$

Доказательство. Заметим, что условия $Ax \le b, x \ge 0$ эквивалентны условиям

$$\begin{pmatrix} -I \\ A \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

В силу предыдущей леммы

$$\max_{\{Ax \le b, x \ge 0\}} \langle c, x\rangle = \min_{\{v \ge 0, y \ge 0, -v + A^T y = c\}} \langle b, y\rangle = \min_{\{y \ge 0, A^T y \ge c\}} \langle b, y\rangle.$$

□

Таким образом, для пары двойственных задач выполнены следующие взаимоисключающие возможности.

- Обе задачи допустимы, тогда существуют решения обеих задач, значения задач конечны и равны.
- Обе задачи недопустимы. Например,

$$A = 0,\ b = (-1, \cdots, -1),\ c = (1, \cdots, 1).$$

- Одна из задач допустима, а другая нет. Тогда допустимая задача неограничена. Докажем это для задачи в форме леммы 4.2 (для доказательства этого факта в стандартной форме надо воспользоваться аргументами теоремы 4.3). Итак, надо доказать, что если $Ax_0 \leq b$ для некоторого x_0 и не существует неотрицательного y со свойством $A^T y = c$, то

  $$\max_{\{Ax \leq b\}} \langle c, x\rangle = +\infty.$$

  Действительно, из леммы Фаркаша следует, что существует y^* со свойствами $\langle y^*, c\rangle < 0$, $Ay^* \geq 0$. Но тогда

  $$\sup_{t>0} \langle c, x_0 - ty^*\rangle = +\infty,$$

  при этом $A(x_0 - ty^*) \leq b$.

Список литературы

[1] Вялый М.Н., Линейные неравенства и комбинаторика
[2] Схрейвер А., Теория целочисленного и линейного программирования.
[3] Циглер Г., Теория многогранников.
[4] Adams D.R. and Hedberg L.I., Function spaces and potential theory
[5] Ferguson S.T. Linear programming. A Concise Introduction.
[6] Ferguson S.T. Game theory.
[7] Vanderbrei R.J., Linear Programming: Foundations and Extensions.