Двойственность в линейном программировании

(1) Сформулируйте задачу, двойственную к транспортной задаче.

(2) Докажите, что если x^*, y^* — допустимые векторы в прямой и двойственной задачах, то они являются решением обеих тогда и только тогда, когда

$$y_i = 0$$

для всех i, для которых $\sum_j a_{ij}x_j < b_i$ и

$$x_j = 0$$

для всех j, для которых $\sum_i a_{ij}y_i > c_j$.

(3) Проверьте, что вектор $(0, 6, 0)$ является решением задачи

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_3 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$x_i \geq 0$

(4) Доказать, что если $A \geq 0, b \geq 0$ и в матрице A нет нулевых столбцов, то задача

$$\langle c, x\rangle \to \max$$

$Ax \leq b, x \geq 0$ имеет решение.

(5) Докажите, что если $\langle c, x\rangle \leq d$ для всех x, удовлетворяющих условию $Ax \leq b$, то существует неотрицательный вектор p, удовлетворяющий условиям $A^T p = c$, $\langle b, p\rangle \leq d$.

(6) Доказать, что уравнение $\langle c, x\rangle = d$ является следствием системы уравнений $Ax = b$ тогда и только тогда, когда найдется такой вектор p, что $c = A^T p, \langle b, p\rangle = d$.

(7) Доказать, что задача $\langle c, x\rangle \to \max$, $Ax \leq b, x \geq 0$ имеет решение для всех b, c тогда и только тогда, когда существуют такие $x_0, p_0 \geq 0$, что

$$Ax_0 < 0, A^T p_0 > 0.$$