

## Прикладные методы анализа 2021

### Вступительная контрольная работа (1 час)

1. Грузик массы  $m$  подвешен снизу к вертикально висящей легкой пружине жесткости  $k$ . Грузик находится в равновесии. Его оттягивают на  $\Delta$  вниз и отпускают. Найти зависимость положения и скорости грузика от времени. Ускорение свободного падения  $g$ .

2. Вычислить интеграл

$$\int_{x,y \in \mathbb{R}} e^{-x^2+xy-y^2} dx dy \quad (1)$$

3. Доказать, что Гамма-функция, определенная интегральным представлением

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2)$$

представляет собой обобщение факториала, а именно, что  $n! = \Gamma(n+1)$ , для натуральных  $n$ .

4. Вычислить следующие интегралы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx & \text{б) } \int_0^{\infty} \operatorname{ch}^{-2} x dx \\ \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x^n}{x} dx & \text{г) } \int_0^{\pi} \sin^4 x dx \end{array}$$

где  $a \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Полиномы Эрмита  $H_n$  являются полиномиальными решениями уравнения  $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ .

1) Показать, что формула ниже дает полиномиальное решение этого уравнения:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (3)$$

2)\* Почему полиномиальное решение этого дифференциального уравнения единственно?

3) Показать, что производящая функция этих полиномов  $w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$  равна  $e^{t^2-2xt}$ .

4) Пользуясь формулой для производящей функции получить рекуррентное соотношение

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (4)$$