Прикладные методы анализа 2021.

Листок 1.

Дедлайн 08.10.2021

1. Рассмотрим задачу Коши для осциллятора с постоянной частотой ω_0 и затуханием γ

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \qquad t > 0, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

a. Найти для этой задачи функцию Грина G^R.

b. Пусть дана теперь конкретная неоднородность $f(t) = \sin\omega_0 t$. Найти решение задачи Коши. Что произойдет с решением при $\gamma = 0$?

2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебаний струны с фиксированной частотой

$$u'' + k^2 u = f(x), \qquad x \in [0,1], \qquad u(0) = u'(1) = 0$$

Найти для неё функцию Грина. При каких k эта задача разрешима?

3. Для линейного дифференциального уравнения

$$x\ddot{y} + (1-x)\dot{y} + \nu y = 0$$

a. Найти его решение в виде формального ряда и показать, что у него есть (и притом единственное) полиномиальное решение (т.н. полиномы Лагерра L_n) тогда и только тогда, когда $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

b. Доказать формулу Родрига для полиномов Лагерра:

$$L_n = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}.$$

c. Доказать ортогональность полиномов Лагерра по следующей мере:

$$\int_0^{+\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = 0, \quad m \neq n.$$

d. * Доказать реккурентное соотношение:

$$(k+1)L_{k+1}(x) = (2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)$$

и найти отсюда норму для полиномов Лагерра.

4. Дискретная по времени версия действия частицы имеет вид

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon \left[\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{\varepsilon^2} + \cos x_k \right], \qquad x_0 = x_N = 0, \quad \varepsilon = \frac{t_f - t_i}{N}.$$

Используя принцип наименьшего действия, найти уравнения движения. Каков непрерывный предел этих уравнений при $N \to \infty$?

5.

a. Опишите колебания двух масс $m_1 = 1, m_2 = 2$ на невесомых пружинах одинаковой жесткости κ в системе, изображенной на картинке:

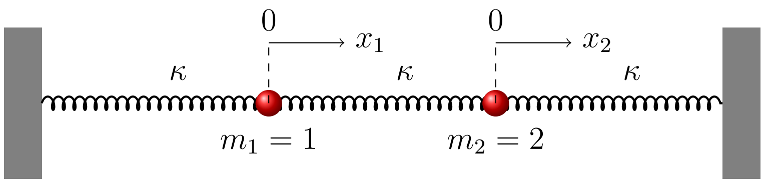

Рис. 1: Два грузика на пружинах в невесомости

с начальными условиями: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$, $\dot{x}_2(0) = -v_0$.

Более точно, необходимо найти функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, описывающие отклонение грузиков от положения равновесия.

b. * Решите задачу, аналогичную предыдущей, но уже с n грузиками одинаковой массы $m_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, при начальных условиях $x_i(0) = 0$, $\dot{x}_i(0) = v_0$, $i = 1, \ldots, n$.

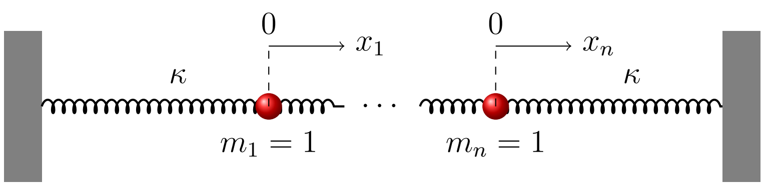

Рис. 2: n одинаковых грузиков на пружинах в невесомости

6. Брусок массы M соединен с двумя неподвижными стенками одинаковыми пружинами жесткости κ. К его центру подвешен груз массы m на нерастяжимой нити длины l. Составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

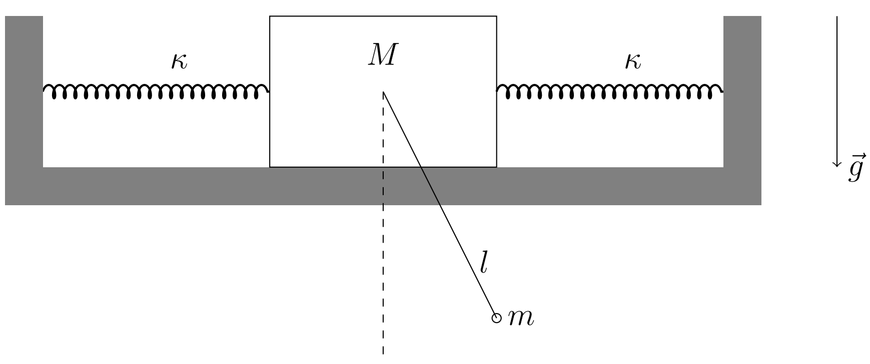

Рис. 3: Брусок на гладкой поверхности с математическим маятником в поле тяготения