Листок 2. Касательные пространства и ориентация многообразия
Гладкие многообразия
Крайний срок сдачи — 31.10.2020

1. Постройте атласы $\mathbb{R}P^n$. При каких n эти многообразия являются ориентируемыми, а при каких нет?

2. Покажите, что следующие группы являются гладкими многообразиями и опишите касательные пространство к ним в их матричных единицах, если (а) $G = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$; (б) $G = \mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$.

3. Пусть отображение $F : S^n \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее каждой точке сферы S^n проходящую через неё и начало координат прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что отображение F — гладкое, dF — невырожден во всех точках.

4. (а) Докажите, что лист Мёбиуса и бутылка Клейна — неориентируемые многообразия. (б) Докажите, что двумерное многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда не содержит в себе лист Мёбиуса.

5. Введите структуры гладких C^k-многообразий на TM и T^*M, если M — многообразие класса C^{k+1} или выше. Являются ли TM и T^*M ориентируемыми?

6. Пусть M — C^∞-многообразие, а X, Y — векторные C^∞-поля, определенные в окрестности точки $p \in M$. Пусть g_1 — интегральная кривая X, начинающаяся в p. Пусть для достаточно малого τ, g_2 — интегральная кривая поля Y, начинающаяся в $g_1(\tau)$; g_3 — интегральная кривая поля $-X$, начинающаяся в $g_2(\tau)$; g_4 — интегральная кривая поля $-Y$, начинающаяся в $g_3(\tau)$. Определим кривую γ для достаточно малых τ следующим образом $\gamma(\tau^2) = g_4(\tau)$. Докажите, что

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to +0} \dot{\gamma}(t).$$

7. Пусть D — бесконечно малый параллелепипед, $V(D)$ — его объём, X — гладкое векторное поле с преобразованием потока φ_t, тогда

$$V\big(\varphi_t(D)\big) = V(D) + V(D)\,\mathrm{div}X(p) \cdot t + o(tV(D)), \quad t \to 0,$$

где p — одна из вершин параллелепипеда. В ортонормированной системе координат (x, y, z) дивергенция определяется как

$$\mathrm{div}X = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}, \qquad X = (X^1, X^2, X^3).$$

8. Для всяких двух точек x, y связного гладкого многообразия M существует диффеоморфизм f такой, что $f(x) = y$.