# Задачи 2 сет, 1.10.2021

1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   а)Квадратная $n \times n$-матрица $A$ – стохастическая.

   б) 1. $Af \geq 0$ для всех неотрицательных векторов-столбцов. 2. $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^t$, а $t$ обозначает транспонирование.

   в) Если вектор-строка $\mu$ – распределение, то $\mu A$ – тоже распределение.

2. Докажите, что произведение стохастических матриц одинакового размера также является стохастической матрицей.

3. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \ldots, \xi_T$ образует МЦ. Всегда ли последовательность $\xi_T, \ldots, \xi_0$ образует МЦ?

4. Пусть $\xi_0, \ldots, \xi_T$ — однородная МЦ с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$, матрицей переходных вероятностей $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и начальным распределением $p^{(0)} = (1/3, 1/6, 1/2)$. Найдите а) $p^{(2)}$ б) $\mathbb{P}(\xi_1 = 3, \xi_3 = 2)$.

5. Метро в городе Марковбурге устроено очень странным образом: там есть $m+1$ станция, одна из которых называется Центральной. Каждая станция соединена линией с Центральной, но никакие другие станции (отличные от Центральной) не соединены между собой. Прогуливающий школу старшеклассник Вася заходит в метро на станции Центральная и отправляется на любую другую станцию (все они могут быть выбраны с одинаковой вероятностью), гуляет там и возвращается домой поздно вечером, а утром снова переживает аналогичное приключение. При этом выбор станции назначения никак не зависит от того, какие станции Вася посещал в предыдущие дни. Обозначим через $\xi_n$ число посещенных Васей станций за $n$ дней, начиная с нулевого (за исключением центральной) ($\xi_0 = 1$, $\xi_1$ может оказаться 1 или 2).

   - проверьте, что $\{\xi_n\}$ - цепь Маркова для некоторого множества состояний $X$ и найдите ее переходные вероятности.
   - обозначим через $\tau_m$ момент, когда Вася посетит все станции метро Марковбурга: $\tau_m = \min\{n : \xi_n = m\}$. Найдите $\tau_m$ для $m = 1$ и $m = 2$.
   - Посчитайте математическое ожидание $\mathbb{E}[\tau_m]$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$.