Семинар 3.

Задача 1. Даны две различные проективные прямые l и m в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано перспективное отображение $\bar{f} : l \xrightarrow{\sim} m$ с центром $A \notin l \cup m$. (По определению, образом произвольной точки $X \in l_1$ при отображении F является точка $Y = (AX) \cap m$.) Докажите, что $\bar{f}$ является проективным отображением.

Задача 2. Дана проективная прямая l в проективной плоскости (над полем $\mathbb{C}$), и дано проективное преобразование $F : l \xrightarrow{\sim} l$. В композицию какого минимального числа перспектив можно разложить преобразование F?

Задача 3. Сколько неподвижных точек может иметь произвольное нетождественное проективное преобразование f проективной прямой $\mathbb{P}^1$:
а) над произвольным основным полем $\mathbf{k}$,
б) над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$?
в) Ответьте на вопросы а) и б), когда f - инволюция.

Задача 4. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ на проективной плоскости называются перспективными, если прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны. Обозначим точки пересечения соответственных прямых этих треугольников: $M = AB \cap A'B'$, $N = BC \cap B'C'$, $P = AC \cap A'C'$. Докажите теорему Дезарга, которая утверждает, что точки M, N и P коллинеарны.