

1. Для $a, b > 0$ найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n.$$

2. Пусть функция $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ монотонно возрастает (ее непрерывность не предполагается!). Докажите, что существует точка x , для которой $f(x) = x$.

3. Доказать, что множество непрерывных функций на прямой континуально.

4. Привести пример ограниченной непрерывной функции на множестве рациональных чисел, не имеющей непрерывного продолжения на всю прямую.

5. Пусть функция непрерывна на множестве рациональных чисел и в каждой точке прямой имеет конечный предел. Будет ли непрерывна функция на прямой, доопределенная этими пределами в иррациональных точках?

6. Докажите, что непрерывная функция на отрезке обладает обратной в точности тогда, когда она строго монотонна.

7. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x.$$

8. Пусть $t_n/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + t_n}{n} \right)^n = e^x.$$

9. Найти пределы: (i) $\lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^{1/n} - 1)/x$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} ((1-x)^{-1} - 3(1-x^3)^{-1})$, (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$,
 (iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$, (v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$, (vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

10. Используя алгебраический базис пространства \mathbb{R} над \mathbb{Q} доказать существование разрывной в каждой точке прямой функции f с тем свойством, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех x, y .