Листок семинаров 5.

1. Докажите, что не существует предела $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$.

2. Вычислите пределы

$$(1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-12x+16}{x^2-4},\qquad (2)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1}$$

3. Докажите, что функция f на прямой непрерывна в точности тогда, когда для всякого открытого множества U множество $f^{-1}(U)$ тоже открыто.

4. Докажите, что функция f непрерывна в точке x в точности тогда, когда для всякой последовательности точек x_n, сходящейся к x, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится.

5. (a) Докажите, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет хотя бы один вещественный корень, а при $c<0$ имеет положительный корень.

(b) Докажите, что всякая непрерывная функция $f\colon[0,1]\to[0,1]$ имеет неподвижную точку, т.е. уравнение $x=f(x)$ разрешимо.

6. Пусть функция f удовлетворяет условию Липшица с постоянной L. Доказать, что такова и функция $|f|$.

7. Докажите, что для всякого замкнутого множества Z на прямой найдется непрерывная функция f, для которой $Z=f^{-1}(0)$.

8. Существует ли непрерывная функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, принимающая каждое значение ровно два раза?

9. Колебанием функции f в точке x_0 называется число

$$\omega(f,x_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\{|f(x)-f(y)|\colon |x-x_0|<\varepsilon,\ |y-x_0|<\varepsilon\},$$

где sup и lim могут быть бесконечны. (i) Доказать, что непрерывность f в x_0 равносильна равенству $\omega(f,x_0)=0$. (ii) Доказать замкнутость множества $\{x\colon \omega(f,x)\ge r\}$ при $r\ge 0$.

10. Доказать, что функция Римана разрывна в рациональных точках и непрерывна в иррациональных.

11. Доказать, что нет функции, непрерывной в рациональных точках и разрывной в иррациональных.

12. Обосновать существование канторовой лестницы: непрерывной возрастающей функции $C\colon[0,1]\to[0,1]$, постоянной со значениями вида $k2^{-n}$ на интервалах дополнения к множеству Кантора, для которой $C(0)=0$, $C(1)=1$.