Листок 2, математический анализ
срок сдачи — до 10 ноября 2021 года

1. Пусть $\alpha > 0$. Исследовать существование предела
$$\frac{3^{\alpha n} + 2^n \sin n}{e^n + 2^n \ln n}.$$

2. Выяснить, при каких $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ сходится ряд
$$\sum_{n>1} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha (\ln\ln n)^\beta}.$$

3. Выяснить, при каких $\alpha > 0$ сходится ряд $\sum_n \sin \frac{1}{n^\alpha}$.

4. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что для всякой стремящейся к нулю последовательности $\{b_n\}$ сходится ряд $\sum_n a_n b_n$. Доказать, что $\sum_n |a_n| < \infty$.

5. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что для всякой последовательности $\{b_n\}$ с условием $\sum_n b_n^2 < \infty$ сходится ряд $\sum_n a_n b_n$. Доказать, что $\sum_n a_n^2 < \infty$.

6. Доказать, что ограниченная функция f на отрезке $[a,b]$ непрерывна в точности тогда, когда она имеет замкнутый график, т. е. замкнуто множество $\Gamma_f := \{(x, f(x))\colon\ x \in [a,b]\}$ на плоскости (т. е. если $(x_n, y_n) \in \Gamma_f$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $(x,y) \in \Gamma_f$). Привести пример, показывающий, что это может быть неверно для неограниченных функций.

7. Построить пример возрастающей функции на отрезке, которая имеет точки разрыва в каждом интервале.

8. Пусть функция f на $[0,+\infty)$ ограничена на каждом отрезке. Предположим, что $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = A$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/x = A$.

9. Пусть функция f на $[0,+\infty)$ ограничена на каждом отрезке. Предположим также, что $f(x) \geq c > 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+1)/f(x) = A$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^{1/x} = A$.

10. Докажите, что если все нули многочлена P вещественные, то и все нули его производной P' тоже вещественные.

11. Пусть f — бесконечно дифференцируемая функция на прямой, причем $f(1/n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $f^{(n)}(0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

12. Пусть f — бесконечно дифференцируемая функция на прямой, причем для каждой точки x найдется такой номер n_x, что производная с этим номером равна нулю в x: $f^{(n_x)}(x) = 0$. Доказать, что f — многочлен.