Листок 2

ДОП.ГЛАВЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ
ТЕОРЕМА ХОПФА-РИНОВА, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ, РАЗБИЕНИЯ НА ШТАНЫ

1. (а) Пусть (M,g) – произвольное риманово многообразие и $\tilde{M}$ – его накрытие. Докажите, что на $\tilde{M}$ можно ввести такую риманову структуру, что $\pi\colon \tilde{M} \to M$ является локальной изометрией. В этом случае M с указанной метрикой называется *римановым накрытием*.

(б) Докажите, что (M,g) полно тогда и только тогда, когда его риманово накрытие полно.

2. Докажите, что верхняя полуплоскость с метрикой Лобачевского $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ полна.

3. Риманово многообразие называется *однородным*, если для любых точек p и q на нём существует изометрия, переводящая p в q. Докажите, что всякое однородное риманово многообразие полно.

4. Пусть (Σ, g) – замкнутая ориентируемая гиперболическая поверхность. Докажите, что в каждом нетривиальном свободном гомотопическом классе петель существует *единственная* простая замкнутая геодезическая.

Указание: Перейдите к универсальному риманову накрытию.

5. Найдите все возможные разбиения на штаны поверхностей рода 2 и 3. Сколько их? Нарисуйте соответствующие графы склейки.