Семинар 5

1. Доказать, что операторы вещественного представления конечной группы записываются в некотором базисе ортогональными матрицами.

2. Доказать, что число одномерных неэквивалентных комплексных представлений конечной группы равно порядку ее факторгруппы по коммутанту.

3. Найти все одномерные комплексные представления группы S_n и группы диэдра D_n.

4. Найти все неприводимые комплексные представления
а) группы S_3;
б) группы S_4 (совет: использовать гомоморфизм $S_4 \to S_3$).

5. Рассмотрим естественное представление T группы G вращений правильного тетраэдра в линейном пространстве комплекснозначных функций на его гранях. Пусть AV – оператор, который значение функции на грани заменяет средним арифметическим ее значений на смежных с ней гранях. Доказать, что AV сплетающий оператор для представления T. Найти собственные значения и собственные подпространства оператора AV.

6. Доказать, что собственные подпространства сплетающего оператора инвариантны относительно операторов представления. Разложить на неприводимые представление группы G в каждом из собственных подпростраств оператора AV (см. задачу 5).

7. Найти все неприводимые комплексные представления группы A_4.

8*. Докажите, что для любого представления $G : V$ имеется изоморфизм $\mathrm{HOM}_G(\mathrm{Reg}, V) = V$, где Reg – это левое регулярное представление, а знак равенства означает изоморфизм.

9*. Доказать,что кратность неприводимого представления V в регулярном представлении равна $\dim V / \dim \mathrm{HOM}_G(V, V)$, если $(\mathrm{char} k, |G|) = 1$. Сформулируйте и докажите обобщенную формулу Бернсайда (проверьте обобщенную формулу Бернсайда для вещественных представлений циклической группы).