## Промежуточный экзамен
## ДОП.ГЛАВЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

На промежуточный экзамен отводится неделя. **Дедлайн:** 22 октября 23:59 по московскому времени. Решения следует отправлять на почту: *wowa-medved@mail.ru*

**Правила:** *При решении задач можно пользоваться любыми материалами, но если Вы ссылаетесь на какой-либо факт, то, пожалуйста, укажите источник (например записки лекций, книга из списка литературы и т.п.)*

**1.** (5 баллов) *(Лемма Гаусса)* Пусть $u \in Dom(\exp_p)$. Докажите, что $\forall v, w \in T_u(T_pM)$ при условии, что $v$ коллинеарно $u$ справедливо равенство:

$$\langle v, w\rangle = \langle d_u \exp_p v, d_u \exp_p w\rangle.$$

**2.** (10 баллов) (а) Пусть $(M, g)$ – произвольное риманово многообразие и $\tilde{M}$ – его накрытие. Докажите, что на $\tilde{M}$ можно ввести такую риманову структуру, что $\pi\colon \tilde{M} \to M$ является локальной изометрией. В этом случае $M$ с указанной метрикой называется *римановым накрытием.*

(б) Докажите, что $(M, g)$ полно тогда и только тогда, когда его риманово накрытие полно.

**3.** (10 баллов) Риманово многообразие называется *однородным*, если для любых точек $p$ и $q$ на нём существует изометрия, переводящая $p$ в $q$. Докажите, что всякое однородное риманово многообразие полно.