Преобразование Лежандра, субдифференциалы, опорные функции

(1) Найти преобразования Лежандра функций

- $$\frac{|x|^p}{p}, p \geq 1$$
- $$e^{x-1}$$
- $$f(x) = c + \langle b, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle,$$
  Q симметричная положительная $n \times n$ — матрица, $b, x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$
- δ_A, где A — выпуклое компактное множество
- h_A, где A — выпуклое компактное множество

(2) Вычислите субдифференциал выпуклой функции в нуле

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

(3) Пусть K — выпуклое тело. Его опорной функцией называется функция на единичной сфере вида

$$h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x, y\rangle.$$

Найдите опорные функции l_p-шара $\{x : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1\}$.

(4) Пусть K — выпуклое тело. Двойственным к K называется тело

$$K^\circ = \{x \colon \langle x, y\rangle \leq 1, \ y \in K\}.$$

Найдите тело, двойственное к l_p-шару $\{x : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1\}$.

(5) Докажите, что произвольная выпуклая, однородная, замкнутая функция h является опорной функцией некоторого замнутого выпуклого множества.

(6) Пусть f, g — конечные выпуклые функции. Докажите, что производная f по направлению z удовлетворяет

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x) = h_{\partial f(x)}(z).$$

Указание: докажите, что $\frac{\partial f}{\partial z}(x)$ — выпуклая, однородная, замкнутая функция аргумента z.

Выведите отсюда, что

$$\partial(f(x) + g(x)) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

(7) Докажите, что выпуклая функция почти всюду дифференцируема.

(8) Докажите, что если K — компактное выпуклое множество, то

$$\partial h_K(u) = K(u),$$

где $K(u) = \{x : h_K(u) = \langle x, u\rangle\}$.

Докажите, что если функция h_K дифференцируема в точке u, то $h_K(u) = \langle \nabla h_K(u), u\rangle$.

(9) Докажите соотношение

$$(f \oplus g)^* = f^* + g^*,$$

где $f \oplus g(x) = \inf_{a+b=x}(f(a) + g(b))$.