ЛИнЕЙноЕ проГрАММИроВАнИЕ

А.В. Колесников

Содержание

1. Симплекс-метод

Симплекс-метод — наиболее известный алгоритм по решению задачи линейного программирования. Он был придуман Данцигом в 40-х годах. Геометрически суть симплекс-метода состоит в следующем: находится вершина многогранника, а далее выбирается соседняя вершина, на которой значение целевой функции больше. Так продолжается до тех пор, пока не найдется точка максимума.

Известно, что теоретически симплекс метод может иметь экспоненциальную сложность. Этот результат был получен Л.Г. Хачияном. Конкурентом симплекс-методу выступает метод эллипсоидов, разработанный А.С. Немировским. Метод эллипсоидов имеет полиномиальную сложность. Тем не менее, оказывается, что в практических реализациях симплекс-метод часто эффективнее.

Ниже мы опишем алгебраическое изложение симплекс-метода, следуя [5].

Сопоставим стандартной задаче ЛП

$$\langle c, x\rangle \to \max,\ Ax \le b,\ x \ge 0$$

следующую сводную таблицу.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	a_{n1}	a_{2n}	$\cdots$	a_{mn}	b_n
	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_m$	0

Таблица задает связь между переменными $x \ge 0$, $y \ge 0$:

$$x_j = \sum_i a_{ij} y_i - c_j.$$

Замечание 1.1. *Пусть $b \ge 0, c \le 0$. Тогда, очевидно, $x = 0$ является решением.*

Алгоритм состоит в применении последовательных линейных преобразований, меняющих местами переменные x и y. При этом будут меняться матрица A, векторы b, c. Наша цель - добиться ситуации, когда при очередном шаге векторы b и c окажутся отрицательными. Тогда все переменный x, оставшиеся в верхней строчке можно положить равными нулю. Можно показать (см. детали в [5]), что тогда 1) те из переменных x, что оказались в левом столбце, можно положить равным значениям b в правом столбце, 2) попутно решается двойственная задача, поскольку для аналогичного алгоритма применяются те же самые преобразования. Способ выписывания решения аналогичен: переменные y в левом столбце зануляются, а переменные y в верхней строчке равны значениям в нижней строчке. Конечность алгоритма вытекает из того, что число всевозможных перестановок переменных конечно и некоторые параметры (см. ниже) при рассматриваемых преобразованиях монотонны.

Случай 1. Пусть $b \ge 0$.

Рассмотрим пример:

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \to \min$$

$$-y_2 + 2y_3 \ge 1$$

$$y_1 + y_3 \ge 1$$

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

	x_1	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
y_2	-1	0	3	2
y_3	2	1	1	1
	-1	-1	-2	0

Правило 1 : Выберем любой столбец отрицательнымпоследним элементом, пусть это будет столбец j_0 с $-c_{j_0} < 0$. Среди всех i, для которых $a_{i,j_0} > 0$, выберем такой индекс i_0, что отношение $b_i/a_{i,j_0}$ наименьшее (если таких несколько, выберем одно из них). Далее перепишем зависимость между переменными так, чтобы x_{i_0} оказалась в числе переменных слева, а y_{j_0} сверху (pivot a_{i_0,j_0}).

В рассматриваемом примере возьмем второй столбец и третью строку. В зависимости

$$x_1 = -y_2 + 2y_3 - 1$$

$$x_2 = y_1 + y_3 - 1$$

$$x_3 = 2y_1 + 3y_2 + y_3 - 2$$

Выразим y_3 через x_2 и остальные переменные

$$y_3 = -y_1 + x_2 + 1$$

Получим

$$x_1 = -2y_1 - y_2 + 2x_2 + 1$$

$$x_3 = y_1 + 3y_2 + x_2 - 1$$

Выразим через переменные y_1, y_2, x_2 функцию стоимости в двойственной задаче

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 = 2y_1 + 2y_2 + x_2 + 1$$

	x_1	y_3	x_3	
y_1	-2	-1	1	2
y_2	-1	0	3	2
x_2	2	1	1	1
	1	1	-1	1

Свойства преобразования 1: 1) Сохраняется неотрицательность b, 2) значение в правом нижнем углу не убывает, 3) Если преобразование невозможно применить, то прямая задача неограничена.

Применяя последовательно это преобразование и пользуясь тем, что количество сводных таблиц конечно, мы видим, что есть две возможности: 1) зацикливание (при этом значение в правом нижнем углу не растет), 2) в какой-то момент все значения c_j оказываются отрицательными. В этом случае значение задачи оказывается равным числу в правом нижнем углу. Решение задачи на минимум получается, если мы положим те y_i, которые находятся в левой части, нулями, а те y_i, которые наверху, соответствующими значениями в последней строке. Решение задачи на максимум получается, если положить x_j в верхней части нулями, а в левой части соответсвующими значениями в последнем столбце.

Проделав еще раз это преобразование, получаем

	x_1	y_3	x_3	
y_1	-2	-1	1	2
y_2	-1	0	3	2
x_2	2	1	1	1
	1	1	-1	1

	x_1	y_3	y_2	
y_1	-5/3	-1	-1/3	2/3
x_3	-1/3	0	1/3	2/3
x_2	7/3	1	-1/3	1/3
	4/3	1	1/3	5/3

Решение

$$x = (0, 1/3, 2/3)$$

$$y = (0, 1/3, 1)$$

Значение задачи $= 5/3$.

Правило 2. Пусть некоторые b_i отрицательны. Возьмем первое отрицательное значение b_i, пусть это будет $b_k < 0$. Найдем какое нибудь отрицательное значение в столбце k, например $a_{k,j_0} < 0$. Сравним $b_k/a_{k,j_0}$ и $b_i/a_{i,j_0}$, для которых $b_i \geq 0$ и $a_{i,j_0} > 0$, и выберем такое i_0, для которого это соотношение наименьшее (i_0 может быть равным k). Далее перепишем зависимость между переменными так, чтобы x_{i_0} оказалась в числе переменных слева, а y_{j_0} сверху (pivot a_{i_0,j_0}).

Свойства преобразования 2: 1) Те компоненты вектора b которые были неотрицательны, сохраняют свою неотрицательность, 2) значение b_k не убывает, 3) Если преобразование невозможно применить, то прямая задача недопустима.

Последовательно применяя это преобразование, добиваемся того, что вектор b становится неотрицательным. Далее переходим к правилу 1.

Рассмотрим пример:

$$3y_1 - 2y_2 + 5y_3 \to \min$$

$$-y_2 + 2y_3 \geq 1$$

$$y_1 + y_3 \geq 1$$

$$2y_1 - 3y_2 + 7y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
y_2	-1	0	-3	-2
y_3	2	1	7	5
	-1	-1	-5	0

Поменяв местами переменные x_1 и y_2, получаем следующую таблицу.

	y_2	x_2	x_3	
y_1	0	1	2	3
x_1	-1	0	3	2
y_3	2	1	1	1
	-1	-1	-2	2

Задача идентична предыдущему примеру. Решая ее, получаем $x = (0, 1/3, 2/3), y = (0, 1/3, 1)$.

2. Выпуклые функции. Преобразование Лежандра

X — нормированное пространство (вообще говоря, бесконечномерное), X^* — его сопряженное. Значение $x^* \in X$ на $x \in X$ обозначается символом $\langle x, x^* \rangle$. Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется выпуклой, если множество

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x),\ f(x) < \infty\}$$

выпукло.

Типичным примером выпуклой функции является функция

$$\delta_A = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$$

где A — выпуклое множество.

Напомним теоремы об отделимости.

Теорема 2.1. *Пусть A и B — выпуклые множества в X, $A \cap B = \emptyset$, $\mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$. Тогда A и B отделимы, т.е. существует такой элемент $x^* \in X^*$, что $\sup_{x\in A}\langle x, x^*\rangle \leq \inf_{x\in B}\langle x, x^*\rangle$.*

Следствие 2.2. *Пусть A — выпуклое замкнутое множество, $x \notin A$. Тогда x и A строго отделимы, т.е. существует такой элемент $x^* \in X^*$, что $\sup_{x\in A}\langle x, x^*\rangle < \inf_{x\in B}\langle x, x^*\rangle$.*

Определение 2.3. *Субдифференциалом функции f в точке x называется множество*

$$\partial f(x) = \{x^* : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^*\rangle, \quad \forall y \in X\}.$$

Вопрос: как связан дифференциал с опорными плоскостями к графику функции f?

Упражнение 2.4. *Для $X = \mathbb{R}^n$ докажите, что если выпуклая функция f дифференцируема в точке x, то $\partial f(x)$ состоит из единственного элемента $\nabla f(x)$.*

Упражнение 2.5. *Докажите, что субдифференциалом функции $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ в нуле является множество $[-1, 1]$.*

Определение 2.6. Сопряженной функцией *(или* **преобразованием Лежандра***) к функции f называется функция*

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\bigl(\langle x, x^*\rangle - f(x)\bigr).$$

Упражнение 2.7. *Докажите, что для $f(x) = \frac{x^2}{2}$ выполено $f^* = f$.*

Докажите, что для $f(x) = |x|$, $g(x) = \delta_{[-1,1]}$ выполнено $f^* = g$, $g^* = f$.

Определение 2.8. *Функция f называется замкнутой, если $\mathrm{epi}(f)$ является замкнутым множеством.*

Теорема 2.9. *Выпуклая и замкнутая функция f является супремумом аффинных функций.*

Доказательство. Если $f = +\infty$, то утверждение очевидно. Зафиксируем точку x_0.

Пусть $f(x_0) < +\infty$. Зафиксируем $\alpha_0 < f(x_0)$. Тогда $(x_0, \alpha_0) \notin \mathrm{epi}(f)$. В силу того, что $\mathrm{epi}(f)$ выпукло и замкнуто, существуют такие $x^* \in X^*$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, что функция $(x, \alpha) \to \langle x^*, x\rangle + \alpha\gamma$ на $X \times \mathbb{R}$ строго разделяет (x_0, α_0) и $\mathrm{epi}(f)$, т.е.

$$\langle x^*, x_0\rangle + \alpha_0\gamma \geq \sup_{(x,\alpha)\in \mathrm{epi}(f)}\bigl(\langle x^*, x\rangle + \alpha\gamma\bigr). \tag{1}$$

Отсюда следует, что $\gamma \leq 0$, потому что в противном случае супремум в правой части бесконечен. Более того, нетрудно убедиться, что $\gamma < 0$ (взяв в правой части $(x_0, f(x_0))$ в качестве (x, α)). Без ограничения общности можно считать, что $\gamma = -1$. Положив $c = \sup_{(x,\alpha)\in \mathrm{epi}(f)}\bigl(\langle x^*, x\rangle - \alpha\bigr)$, получим

$$\langle x^*, x_0\rangle - c > \alpha_0, \quad \langle x^*, x\rangle - c \leq \alpha, \quad \forall (x, \alpha) \in \mathrm{epi}(f).$$

Из второго неравенства следует, что график аффинной функци лежит ниже $\langle x^*, x_0\rangle - c$ графика $f(x)$. Взяв точку $(x,\alpha) = (x_0, f(x_0)) \in \mathrm{epi}(f)$, получим

$$\alpha_0 < \langle x^*, x_0\rangle - c < f(x_0).$$

Так как α_0 может быть выбрано сколь угодно близко к $f(x_0)$, получаем утверждение теоремы для случая $f(x_0) < \infty$.

Пусть $f(x_0) = +\infty$. Так же, как и выше, для произвольного $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ находим такие $x^* \in X^*$ и $\gamma \le 0$, что функция $(x,\alpha) \to \langle x^*, x\rangle + \alpha\gamma$ на $X \times \mathbb{R}$ строго разделяет (x_0, α_0) и $\mathrm{epi}(f)$. Если $\gamma < 0$, то рассуждения повторяют предыдущие. Пусть $\gamma = 0$. Тогда из (1) следует, что

$$\langle x^*, x_0\rangle - c \ge 0, \quad \langle x^*, x\rangle - c \le 0 \ \ \forall (x,\alpha) \in \mathrm{epi}(f).$$

Возьмем теперь произвольную непрерывную аффинную функцию p_0, не превосходящую f. Рассмотрим семейство функций $p_\mu(x) = p_0(x) + \mu(\langle x^*, x\rangle - c)$, $\mu > 0$. Из второго неравенства вытекает, что p_μ не превосходит f, а из первого вытекает, что $p_\mu(x_0)$ больше α_0 при достаточно больших μ. □

Теорема 2.10. *(***Фенхеля-Моро о второй сопряженной функции***). Следующие условия равносильны*

1) *функция f выпукла и замкнута*
2) *f является супремумом аффинных функций $x \to \langle x, x^*\rangle + b$*
3) *$f = f^{**}$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана выше, импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. Докажем 2) $\Longrightarrow$ 3). Аффинная функция $\langle x^*, x\rangle - \alpha$ не превосходит $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \ge \sup_{x \in X}(\langle x^*, x\rangle - f(x)) = f^*(x^*)$. В силу того, что f — супремум аффинных функций, выполено равенство

$$f(x) = \sup_{x^* \in X^*; \alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \ge f^*(x^*)} \Big(\langle x^*, x\rangle - \alpha\Big).$$

Нетрудно видеть, что в качестве α в супремуме в правой части всегда можно взять $f^*(x^*)$. Следовательно,

$$f(x) = \sup_{x^* \in X^*} \Big(\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\Big) = f^{**}(x).$$

□

f является супремумом функций вида $\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*)$

Теорема 2.11. *Для выпуклой замкнутой функции следующие условия равносильны.*

1) $x^* \in \partial f(x)$
2) $x \in \partial f^*(x^*)$
3) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^*\rangle$.

Доказательство. Из $x^* \in \partial f(x)$ и определения субдифференциала следует, что для любого z

$$\langle x, x^*\rangle - f(x) \ge \langle z, x^*\rangle - f(z).$$

Следовательно

$$f^*(x^*) = \sup_z(\langle z, x^*\rangle - f(z)) = \langle x, x^*\rangle - f(x).$$

Поэтому 1) $\Longrightarrow$ 3). Проведя рассуждения в обратном направлении, получаем, что 3) $\Longrightarrow$ 1).

Аналогичное рассуждение, начатое с $x \in \partial f^*(x^*)$, приводит к равенству $f^{**}(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$. Результат следует из теоремы Фенхеля-Моро. □

Следствие 2.12. *Если функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемы и отображения $x \to \nabla f(x)$, $y \to \nabla f^*(y)$ — взаимно однозначные отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, то градиенты f, f^* взаимно обратны:*

$$\nabla f^*(\nabla f(x)) = x,\ \nabla f(\nabla f^*(y)) = y.$$

При этом

$$f(x) + f^*(\nabla f(x)) = \langle x, \nabla f(x) \rangle.$$

3. Грани и вершины полиэдров.

Материал: [2], глава 8.

Пусть задан полиэдр $\{x : Ax \leq b\}$.

Определение 3.1. *Неявное равенство: неравенство $\langle \alpha, x \rangle \leq \beta$ в системе $\{x : Ax \leq b\}$ называется неявным равенством, если $\langle \alpha, x \rangle = \beta$ для любого решения x системы $\{x : Ax \leq b\}$.*

В системе неравенств $\{x : Ax \leq b\}$ можно выделить подсистему неявных равенств

$$\{x : A^{=}x = b^{=}\}.$$

Оставшиеся неравенства будем обозначать следующим образом:

$$\{x : A^{+}x \leq b^{+}\}.$$

Определение 3.2. *Ограничение $\langle \alpha_i, x \rangle \leq \beta_i$ в системе неравенств $Ax \leq b$ называется избыточным, если оно следует из оставшихся ограничений. Если их нет, то система неравенств называется неприводимой (не избыточной).*

Заметим, что путем удаления избыточных неравенств любую систему можно сделать не избыточной.

Напомним, что грань — это пересечение полиэдра с опорной гиперплоскостью.

Теорема 3.3. *Непустое множество F является гранью тогда и только тогда, когда*

$$F = \{x \in P : A'x = b'\}$$

для некоторой подсистемы $\{x : A‘x \leq b‘\}$ системы $Ax \leq b$.

Доказательство. Путь $F = \{x \in P : \langle c, x \rangle = \delta\}$ для некоторой опорной гиперплоскости $\langle c, x \rangle = \delta$. Здесь $\delta = \max\{\langle c, x \rangle | Ax \leq b\}$. В силу теоремы о двойственности

$$\delta = \min\{\langle b, y \rangle | A^T y = c, y \geq 0\},$$

причем минимум достигается на некотором векторе y_0. Пусть $\{x : A^{-}x \leq b^{-}\}$ — подсистема неравенств, соответствующая положительным компонентам y_0. Тогда $F = \{x \in P : A'x = b'\}$, потому что для $x \in P$ имеем: $\langle c, x \rangle = \delta$ выполнено тогда и только тогда, когда $\langle b, y_0 \rangle = \langle A^T y_0, x \rangle$, а последнее равносильно $A'x = b'$. Таким образом, любая грань представила в виде $F = \{x \in P : A'x = b'\}$.

Наоборот, любое множество вида $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ является множеством достижения $\max\{\langle c, x \rangle | x \in P\}$, при c, равном сумме строк A'. □

Замечание 3.4. *Если F — грань P, то F также является полиэдром, а его грани являются гранями P.*

Определение 3.5. *Гипергранью (фасетой) полиэдра P называется максимальная по включению, отличная от P грань.*

Теорема 3.6. *Если система неравенств $A^+x \le b^+$ не содержит избыточных неравенств для $Ax \le b$, тогда существует взаимно однозначное отображение между гипергранями P*

$$F_i = \big\{x : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_i\big\} \tag{2}$$

и неравенствами $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$ в $A^+x \le b^+$.

Доказательство. Докажем, что каждая гипергрань F допускает представление (2). Действительно, пусть F задается некоторой подсистемой $A'x \le b'$ системы $A^+x \le b^+$. Пусть $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$ — некоторое неравенство этой системы. Тогда грань $F' = \big\{x : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_i\big\}$ удовлетворяет условию $F \subset F'$, при этом неравенство $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$ не является неявным равенством. Следовательно $F' \ne P$. В силу того, что F — гипергрань, получаем $F = F'$.

Докажем теперь, что любое представление (2) задает некоторую гипергрань F'. Пусть $A'x \le b'$ — система оставшихся неравенств. Для доказательства, что F' — гипергрань, достаточно доказать, что найдется такой вектор x_0, что $A^=x_0 = b^=$, $\langle \alpha_i, x_0\rangle = \beta_i$ и $A'x_0 < b'$. Действительно, из определения неявных равенств следует, что существует вектор x_1, для которого $A^=x_1 = b^=, A^+x_1 < b^+$. Поскольку $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$ не является избыточным неравенством в $Ax \le b$, существует вектор x_2, удовлетворяющий системе $A^=x_2 = b^=, A'x_2 \le b', \langle \alpha_i, x_2\rangle > \beta_i$. Тогда в качестве x_0 можно взять выпуклую комбинацию x_1, x_2. □

Определение 3.7. *Размерностью полиэдра называется размерность его аффинной оболочки.*

Замечание 3.8. *Размерность P равна n минус ранг матрицы $A^=$.*

Следствие 3.9. *Размерность любой гиперграни на единицу меньше размерности P.*

Доказательство. При доказательстве можно считать систему $Ax \le b$ не избыточной. Рассмотрим гипергрань $F = \{x \in P : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_i\}$, где $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$ — неравенство из $A^+x \le b^+$. Поскольку система $Ax \le b$ не избыточна, единственными неявными равенствами системы $Ax \le b, \langle \alpha_i, x\rangle \ge \beta_i$ будут равенства $A^=x = b^=, \langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i, \langle \alpha_i, x\rangle \ge \beta_i$. Действительно, если из $Ax \le b$, $\langle \alpha_i, x\rangle \ge \beta_i$ следует $\langle \alpha_j, x\rangle = \beta_j$ для некоторого неравенства $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_j$, то $F \subset \{x \in P : \langle \alpha_i, x\rangle = \beta_j\}$. Поскольку оба множества— гиперграни, то по предыдущей теореме неравенство $\langle \alpha_j, x\rangle \le \beta_j$ должно совпадать с $\langle \alpha_i, x\rangle \le \beta_i$. Следовательно, размерность F равна n - ранг матрицы $[A, a_i]$, т.е., на единицу меньше размерности P. □

Определение 3.10. *Грань называется минимальной, если она не содержит никакие другие грани.*

Замечание 3.11. *Из замечания 3.4 следует, что грань F является минимальной, тогда и только тогда, когда она является аффинным подпространсвом.*

Теорема 3.12. *Множество F является минимальной гранью тогда и только тогда, когда $\emptyset \ne F \subset P$ и*

$$F = \{x : A'x = b'\}$$

для некоторой подсистемы $A'x \le b'$ из $Ax \le b$.

Доказательство. Если грань F допускает такое представление, то она является афинным подпространством и, следовательно, минимальной гранью.

Обратно, пусть F — минимальная грань. Она допускает представление

$$F = \{x : A^{''}x \leq b^{''}, A'x = b'\},$$

где $A^{''}x \leq b^{''}, A'x \leq b'$ — некоторые подсистемы системы $Ax \leq b$. Выберем $A^{''}$ минимально возможной. Тогда все неравенства $A^{''}x \leq b^{''}$ будут неизбыточными в системе $\{x : A^{''}x \leq b^{''}, A'x = b'\}$. Поскольку F не имеет граней, система $\{x : A^{''}x \leq b^{''}\}$ должна быть пустой. □

Следствие 3.13. *Каждая вершина задается n линейно независимыми уравнениями из системы $Ax = b$.*

Список литературы

[1] Вялый М.Н., Линейные неравенства и комбинаторика
[2] Схрейвер А., Теория целочисленного и линейного программирования.
[3] Циглер Г., Теория многогранников.
[4] Adams D.R. and Hedberg L.I., Function spaces and potential theory
[5] Ferguson S.T. Linear programming. A Concise Introduction.
[6] Ferguson S.T. Game theory.
[7] Vanderbrei R.J., Linear Programming: Foundations and Extensions.