Листок 2 (срок сдачи - 19 ноября 2021)

(1) Решите задачу линейного программирования, используя симплекс-метод (в версии, рассмотренной на лекциях)

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 3$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1.$$
$$x_i \geq 0.$$

(2) Решите задачу линейного программирования, используя симплекс-метод (в версии, рассмотренной на лекциях)

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1$$
$$-3x_1 + x_3 \leq -1$$
$$-2x_1 - x_2 \leq -1$$
$$x_j \geq 0.$$

(3) Найти все вершины многогранника в $\mathbb{R}^4$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$
$$x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

(4) Дано число n. Найти

$$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \to \max$$

при условии

$$u_i + v_j \leq 2^{i+j},$$

для всех $1 \leq i, j \leq n$.

(5) Матрица размера $m \times n$ называется латинским прямоугольником, если элементы каждой строки этой матрицы образуют перестановку чисел от 1 до n, и в каждом столбце все числа разные.

Докажите, что латинский прямоугольник $m \times n$ всегда можно дополнить до латинского квадрата.

(6) Докажите теорему, “двойственную” к теореме Дилуорса. В конечном, частично упорядоченном множестве мощность длиннейшей цепи равна мощности наименьшего разбиения на антицепи

(7) В последовательности из $nm + 1$ различных действительных чисел П.Эрдёш ищет “длинную цепь” — $n + 1$ элемент, идущие слева направо в порядке возрастания. Д.Секерёш, напротив, ищет “длинную антицепь” — $m + 1$ элемент, идущие слева направо в порядке убывания. Докажите, что хотя бы один из них преуспеет.