

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ

осень 2021

Промежуточная контрольная работа

решения присылайте на kazarian@mccme.ru не позднее 24:00 3 ноября 2021 г.

1. Существует ли ретракция кренделя с дыркой на его граничную окружность? (Ретракция — это непрерывное отображение пространства на его подпространство, тождественное на этом подпространстве.)
2. Докажите, что следующие пространства гомотопически эквивалентны букету компактных многообразий без края. Укажите явно эти многообразия.
 - а) дополнение к набору подпространств в \mathbb{C}^4 , заданных уравнениями $z_1 = z_2 = 0$, $z_3 = z_4 = 0$;
 - б) $\mathbb{R}P^3$ с двумя выколотыми точками.
3. Два пространства Z_0 и Z_1 получены склейкой из пространств X и Y при помощи непрерывных отображений $f_0 : A \rightarrow Y$ и $f_1 : A \rightarrow Y$, соответственно, где $A \subset X$ — подпространство. Предположим, что f_0 и f_1 гомотопны. Верно ли, что Z_0 и Z_1 гомотопически эквивалентны? Если это верно не всегда, то какие дополнительные условия нужно наложить на пространства задачи, чтобы утверждение было справедливым?
4. Дана последовательность групп и гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow P_4 \xrightarrow{\Delta} P_4 \xrightarrow{\Delta} P_4 \xrightarrow{\Delta} P_4 \longrightarrow 0,$$

где P_4 — пространство многочленов с рациональными коэффициентами от одной переменной степени не более 4, а средние гомоморфизмы заданы так:

$$\Delta: f \mapsto f(x+2) - 3f(x+1) + 3f(x) - f(x-1).$$

Покажите, что данная последовательность является цепным комплексом и вычислите его гомологии.

5. Вычислите группы целочисленных гомологий следующих пространств (можно использовать любую модель теории гомологий)
 - а) факторпространство полнотория $S^1 \times D^2$ по его граничному тору;
 - б) $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$;
 - в) двумерный остов (объединение граней размерности не выше 2) 4-мерного симплекса.