Задачи 5 сет, 31.10.2021

В этом параграфе речь только о марковских цепях с конечным числом состояний. Подумайте, где ломается доказательство эргодической теоремы для счетных марковских цепей?

1.Определение. Мартица переходных вероятностей (МПВ) Π называется *перемешивающей*, если существует такая степень $s \in \mathbb{N}$, что все элементы матрицы Π^s строго положительны.

Как обсуждалось на лекциях (где-то в районе леммы 11), элемент $p_{ij}^{(s)}$ матрицы Π^s суть вероятность перехода за s шагов из состояния i в состояние j. Это замечание дает удобный способ проверки является ли МПВ перемешивающей, *не возводя матрицу в степень*. Действительно, скажем, чтобы убедиться, что все элементы матрицы Π^2 положительны, достаточно посмотреть на граф марковской цепи и проверить, что из любого состояния можно перейти в любое за 2 шага. В частности, свойство матрицы быть перемешивающей *не зависит* от конкретных элементов матрицы, а зависит только от того, где в матрице находятся нули (и, соответственно, между какими состояниями в графе цепи нет стрелок, а между какими — есть).

2.Определение. Марковская цепь называется *эргодической*, если она имеет единственное стационарное состояние π и для любого начального распределения $p^{(0)}$ выполнено $p^{(n)} \to \pi$ при $n \to \infty$. Цепь называется *экспоненциально эргодической*, если эта сходимость экспоненциальна: существуют постоянные $C > 0$, $0 < \lambda < 1$, такие что для любого начального распределения $p^{(0)}$ выполнено $|\pi - p^{(n)}|_1 \leq C\lambda^n$, для любого n. Здесь $|v|_1 := \sum_j |v_j|$.

На последней лекции была доказана *эродическая теорема*, в частности утверждающая, что если МЦ имеет перемешивающую МПВ, то МЦ экспоненциально эргодична. Обратное неверно! (см. задачу 5).

На самом деле, любая эргодическая МЦ с конечным множеством состояний является экспоненциально эргодической.

3. Не существует канонической терминологии. Свойство перемешивания часто называют эргодичностью и наоборот. Более того, в теории динамических систем эти слова означают несколько другие понятия, хоть и родственные. Be careful.

Задачи.

1. Рассмотрим следующие МПВ:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Являются ли они перемешивающими?

   Указание: пожалуйста, не надо возводить матрицу в степень. Почитайте текст выше.

2. Верно ли, что всякая марковская цепь с конечным числом состояний, имеющая единственное стационарное состояние, эргодична? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

3. Рассмотрим случайное блуждание на множестве состояний $\{1, \ldots, L\}$, заданное вероятностями перехода $p_{ii+1} = p$ и $p_{ii-1} = 1 - p$ для $2 \leq i \leq L - 1$, $p_{12} = a$, $p_{11} = 1 - a$ и $p_{LL-1} = b$, $p_{LL} = 1 - b$ для каких-нибудь $0 < p < 1$ и $0 < a, b \leq 1$, а для остальных i, j выполнено $p_{ij} = 0$.

   a) Докажите, что соответствующая матрица переходных вероятностей перемешивает тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $a < 1$ или $b < 1$.

   b) Найдите все пары $0 < a, b \leq 1$, при которых случайное блуждание эргодично при произвольном $0 < p < 1$.

   c) Для произвольных a, b, p удовлетворяющих $0 < a, b \leq 1$ и $0 < p < 1$ найдите стационарное состояние. [1] Единственно ли оно? Нашлись ли такие a, b, p при которых есть стационарное состояние единственно, а эргодичности нет?

4. Рассмотрим модель Эренфестов: берем N пронумерованных от 1 до N шаров и два ящика, часть шаров лежит в одном, а часть в другом. Наугад называем номер от 1 до N (с равными вероятностями) и перекладываем шар с этим номером из ящика, где он лежал, в другой. Нас интересует число шаров в каждом ящике. Конечно, достаточно знать число шаров в первом ящике, на это имеется $N + 1$ возможность, от 0 до N.

   (1) Докажите, что модель Эренфестов задает марковскую цепь с $N+1$ состоянием (состояние– число шаров в первом ящике). Вычислите переходные вероятности.

   (2) Найдите стационарное состояние для модели Эренфестов. Единственно ли оно? [2]

   (3) Перемешивает ли МПВ в модели Эренфестов?

   (4) Эргодична ли марковская цепь из модели Эренфестов?

   Следующая задача дает пример эргодической цепи, МПВ которой не перемешивает. Возьмите $L = 2$, нарисуйте граф цепи и запомните его как простейший пример такой ситуации.

5. Рассмотрим (однородную) МЦ $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с конечным множеством состояний $\{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$, такую что $p_{11} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $2 \leq i \leq L$ существует $k_i \geq 1$, такое что $p_{i1}^{(k_i)} > 0$ — вероятность перейти из состояния i в состояние 1 за k_i шагов положительна.

   а) Покажите, что МПВ такой МЦ не может быть перемешивающей.

   б) Докажите, что последовательность $(p_{i1}^{(m)})_{m \geq 0}$ не убывает.

   в) Покажите, что $\mathbb{P}(\xi_{mk} \neq 1) \leq (1 - \delta)^m$ для любого $m \geq 1$, где $k = \max_i k_i$, а $\delta = \min_i p_{i1}^{(k_i)} > 0$.

   А теперь выводы:

[1] Ответ не должен быть хорошим.

[2] А здесь ответ хороший, как часто бывает в задачах, приходящих из физики.

г) Покажите, что $\mathbb{P}(\exists k \geq 0 : \ \xi_n = 1 \, \forall n \geq k) = 1$ (т.е. с вероятностью единица мы приезжаем в состояние 1 и там живем.)

д) Покажите, что такая МЦ эргодична и $\pi = (1, 0, \ldots, 0)$ — ее единственное стационарное состояние.

6. *Необязательная задача (дополняющая предыдущую).* Рассмотрим МЦ $\xi_0, \xi_1, \ldots$, с множеством состояний $\{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$, такую что $p_{11} = 1$ и $p_{22} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $3 \leq i \leq L$ существует $k_i \geq 1$, такое что хотя бы одна из вероятностей $p_{i1}^{(k_i)}$ либо $p_{i2}^{(k_i)}$ положительна. Покажите, что такая МЦ не может быть эргодической. Докажите, что

$$\mathbb{P}(\exists k \geq 0 : \ \xi_n = 1 \, \forall n \geq k \text{ or } \xi_n = 2 \, \forall n \geq k) = 1$$

(т.е., в зависимости от точки старта, мы падаем либо на состояние 1, либо на состояние 2).

О модели Эренфестов.

Модель Эренфестов – известная ранняя стохастическая модель в статистической механике. Статистическая механика (=статистическая физика) ставит своей целью объяснить поведение макроскопических систем с точки зрения микроскопической динамики частиц. Например, динамику газа с точки зрения динамики молекул.

Статистическая механика задает, например, такие вопросы. Почему газ, изначально собранный в одной половине комнаты, распространится по всей комнате и уже никогда не вернется в ту половину, где он был изначально? Ведь согласно теореме Пуанкаре о возвращении [3] это должно произойти (но тут ответ простой: время, которое придется ждать, чтобы это произошло, больше времени существования вселенной). А вот гораздо более сложный, *до сих пор открытый вопрос* (грубо говоря, это называется "эргодическая гипотеза"): почему газ равномерно заполнит обе половины комнаты, и если температура газа в начальный момент времени была распределена неоднородно, то со временем она выровняется?

Модель Эренфестов – простейшая модель, чтобы изучать "равномерное заполнение газом комнаты". Кстати говоря, как наверное вы увидите из последующих задач, эта модель не очень хороша: она не обладает свойством сходимости к равновесию (эргодичности), так что "равномерного заполнения комнаты"и "выравнивания температуры" не происходит (хотя "почти" происходит). Более подробно на доступном языке о модели Эренфестов можно почитать в книге М.Кац, "Вероятность и смежные вопросы в физике". Речь о том, почему вообще вероятностные модели появляются в физике и почему они хороши. В первом приближении тут такое правило: чем больше в модели стохастики, тем проще она для строгого анализа (учи теорвер!), но тем дальше она от жизни (реальные молекулы не прыгают случайно из одной половины комнаты в другую). Однако, согласно современному пониманию статистической физики, какую-то случайность в систему все равно нужно вводить, иначе (а) не получится провести

[3] См. Википедию, а лучше, к примеру, В.И. Арнольд, "Математические методы классической механики".

никакого строгого анализа (б) ее поведение далеко не всегда будет соответствовать нашим физическим ожиданиям. [4]

Тем, кому интересно, очень порекомендую научно-популярную книгу Д.Рюэль, "Случайность и хаос— сравнительно коротко и классно о том же, на популярном языке, от одного из известнейших статистических физиков 20-го и 21-го веков.

[4]Насколько я знаю, когда делается прогноз погоды, в уравнения метеорологии добавляется случайный шум: так результат оказывается лучше.