Разбор задач, 10.11.2021

Задача 3.2 Please check the attached pdf files for the diagrams of the random walk for each strategy. The state X_i of the Markov chain corresponds to the amount of money $100 * i$ for each $1 \geq i \geq 8$.

We start with the strategy of Nikolai's mom.

Let ϕ_i be the probability that the chain reaches state 8 before reaching state 0, starting from the state i. It means that if we denote by S_j the first $n \geq 0$ such that $X_n = j$, then

$$\phi(i) = P_i(S_8 < S_0) = P(S_8 < S_0 | X_0 = i).$$

Using the Markov property, we get

$$\phi(i) = 0.4\phi(i+1) + 0.6\phi(i-1)$$

for $1 \geq i \geq 7$. Note also that

$$\phi(0) = 0$$

and

$$\phi(8) = 1.$$

It gives us a system of linear equations.

We solve this system and find the following vector:

$$\phi = (\phi(1), \phi(2), \phi(3), \phi(4), \phi(5), \phi(6), \phi(7), \phi(8)) = (0.0203, 0, 0508, 0.0964, 0.1649, 0.2677, 0.4219, 0.6531, 1)$$

Thus, the probability that the chain reaches state 8 before reaching state 0 (= the chances that Nikolai has against Yermil) is exactly ϕ_3 since he starts from 300 roubles and so is equal to 0.0964.

Remark 0.1. *Please note that ϕ_i is increasing with the growth of i - so it is better to start the game when you are already quite rich!*

Now we switch to the idea given by Nikolai's dad.

The chain looks differently in this case (please check the picture below!) and so the equations are:

$$\phi(3) = 0.4\phi(6)$$

$$\phi(6) = 0.4\phi(8) + 0.6\phi(4)$$

$$\phi(4) = 0.4\phi(8)$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(8) = 1.$$

We solve and find $\phi(3) = 0.256$ (while $\phi(4) = 0.4$ and $\phi(6) = 0.64$).

So, the dad's strategy gives Kolya better chances to win (still, it is very hard to be an opposition in Markovka).

Задачи 4.2 и 4.3 Apparently, all the adventures of the virus inside of anti-vaxxer N. are described by a branching process with the initial state $Z_0 = 1$ and branching mechanism $p_0 = \frac{1}{10}$, $p_1 = \frac{7}{10}$ and $p_2 = \frac{2}{10}$. So one should be able to write up a generating function of the branching mechanism:

$$\phi(z) = \frac{1}{10}z^0 + \frac{7}{10}z^1 + \frac{2}{10}z^2 = \frac{1}{10}(1 + 7z + 2z^2).$$

So, the probability that Mister N. passes a negative test and losses any traces of the virus in his blood is exactly the probability ϵ of the ultimate extinction which is the smallest positive z such that $\phi(z) = z$. We have to solve:

$$1 + 7z + 2z^2 = 10z.$$

$$(2z - 1)(z - 1) = 0.$$

Therefore, $\epsilon = \frac{1}{2}$. (N. either recovers of not, exactly as was predicted by the ideologists of the anti - vaccination campaign).

Now lets check what happens with the mean and the deviation. The mean number of offspring of individual is $m = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \times 2 = \frac{11}{10}$. Therefore,

$$\mathbb{E}Z_n = m^n = (\frac{11}{10})^n.$$

As for the standard deviation, we need to work more.

First we note that :

$$\phi'(1) = \mathbb{E}Z_n$$
$$\phi''(1) = \mathbb{E}(Z_n)^2 - \mathbb{E}Z_n$$

So the square of the standard deviation is given by the formula

$$\sigma^2 = \phi''(1) + \mathbb{E}Z_n - \mathbb{E}(Z_n)^2$$

.

Now remember that $\phi_n(z) = \phi_{n-1}(\phi(z))$. So we can differentiate this equality:

$$\phi_n'(z) = \phi_{n-1}'(\phi(z))\phi'(z)$$

and even do it twice:

$$\phi_n''(z) = \phi_{n-1}''(\phi(z))(\phi'(z))^2 + \phi_{n-1}'(\phi(z))\phi'(z).$$

If we put $z = 1$ and use that $\phi(1) = 1$, we see that

$$\phi_n''(1) = \phi_{n-1}''(1)(\phi'(1))^2 + \phi_{n-1}'(1)\phi''(1).$$

But $\phi'(1) = \mathbb{E}Z_n = m$ (we just calculated it above and know that $m = \frac{11}{10}$!) and $\phi_{n-1}'(1) = m^{n-1}$ and so

$$\phi_n''(1) = \phi_{n-1}''(1)m^2 + m^{n-1}\phi''(1).$$

Iterating we find that

$$\phi_n''(1) = \phi''(1)\sum_{k=n-1}^{2n-2} m^k.$$

It is easy to compute $\phi''(1) = \frac{4}{10}$.

So
$$\sigma^2 = \phi''(1) + \mathbb{E}Z_n - \mathbb{E}(Z_n)^2 = \frac{4}{10}\sum_{k=n-1}^{2n-2} m^k + m^n - m^2 n.$$

Hope that you remember how to deal with the geometric progression. If so, you see that
$$\sigma^2 = (4-m)m^{n-1}(m^n - 1) = \frac{29}{10}(\frac{11}{10})^{n-1}((\frac{11}{10})^n - 1).$$

What changes in case we start with $Z_0 = m$?

The process behaves a superposition of N i.i.d. copies of the previous process. The situation with extinction becomes more rare: we need that all N copies die and so by independence $\epsilon^N = \frac{1}{2^N}$.

Each population is a sum of the populations of "small" processes included, so our new mean is simply
$$Nm^n = N(\frac{11}{10})^n.$$

With the square of the standard deviation, we need to look at $N{\sigma_n}^2$. That's it, we are done!

Задача 5.4. 1) Пусть ξ_n обозначает число шаров в первом ящике после n вытаскиваний. Случайные величины ξ_n можно построить следующим образом: ξ_0 — задано, а
$$\xi_{n+1}(\omega) = \xi_n(\omega) + \eta_{n+1}^{\xi_n(\omega)}(\omega),$$
где случайные величины η_j^m определены для $0 \le m \le N$ и всех $j \ge 1$ [1], независимы друг от друга и от ξ_0, и распределены следующим образом:
$$\mathbb{P}(\eta_{n+1}^m = 1) = 1 - m/N \quad \text{and} \quad \mathbb{P}(\eta_{n+1}^m = -1) = m/N.$$

Следовательно,
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1}|\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\xi_n + \eta_{n+1}^{\xi_n} = i_{n+1}|\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0)\\ &\quad = \mathbb{P}(i_n + \eta_{n+1}^{i_n} = i_{n+1}|\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\eta_{n+1}^{i_n} = i_{n+1} - i_n),\end{aligned}$$

так как $\eta_{n+1}^{i_n}$ не зависит от ξ_0 и η_j^m с $j \le n$, а значит, по построению ξ_k, и от ξ_k с $k \le n$ (так как ξ_k строятся через ξ_0 и η_j^m с $j \le n$). Здесь мы предполагали, что $\mathbb{P}(\xi_n = i_n, \ldots, \xi_0 = i_0) \ne 0$. Совершенно аналогично находим, что
$$\mathbb{P}(\xi_{n+1} = i_{n+1}|\xi_n = i_n) = \mathbb{P}(\eta_{n+1}^{i_n} = i_{n+1} - i_n).$$

Последние две формулы влекут, что последовательность ξ_n образует марковскую цепь. Чтобы найти переходные вероятности, достаточно вычислить их правую часть,

[1] Здесь m, j — целые числа; в формуле выше мы вместо индекса m подставляем случайную величину, тем самым делая случайный выбор между различными случайными величинами η_{n+1}^m. Если угодно, то это можно переписать по-другому: $\eta_{n+1}^{\xi_n} = \sum_{m=0}^N \eta_{n+1}^m \mathbb{I}_{\xi_n = m}$, где $\mathbb{I}_A$ обозначает индикаторную функцию события A.

что делается тривиально из определения случайных величин η_j^m; мы находим переходные вероятности как на приложенной ниже картинке. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1/N & 0 & 1-1/N & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2/N & 0 & 1-2/N & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где первая строка соответствует состоянию 0, а последняя — состоянию N.

2) По определению, стационарное состояния π является левым собственным вектором матрицы Π с собственным значением единица:

$$\pi\Pi = \pi.$$

Запишем явно полученную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_1}{N} &= \pi_0 \\ \pi_0 + \frac{2}{N}\pi_2 &= \pi_1 \\ \frac{N-1}{N}\pi_1 + \frac{3}{N}\pi_3 &= \pi_2 \\ &\ldots \\ \frac{N-k+1}{N}\pi_{k-1} + \frac{k+1}{N}\pi_{k+1} &= \pi_k \\ &\ldots \\ \frac{\pi_{N-1}}{N} &= \pi_N. \end{aligned}$$

Последовательно выражаем π_j через π_0 и находим $\pi_1 = N\pi_0$, $\pi_2 = \frac{N(N-1)}{2}\pi_0$, ... Замечаем закономерность $\pi_j = C_N^j\pi_0$, верность которой легко проверяется по индукции для всех j. Последнее уравнение до сих пор не использовалось, подставляем полученный результат в него:

$$\frac{C_N^{N-1}}{N}\pi_0 = C_N^N\pi_0,$$

что верно при любом π_0. Значение π_0 находим из условия $\sum_j \pi_j = 1$. Так как $\sum_j C_N^j = 2^N$, получаем $\pi_0 = 2^{-N}$. Итого,

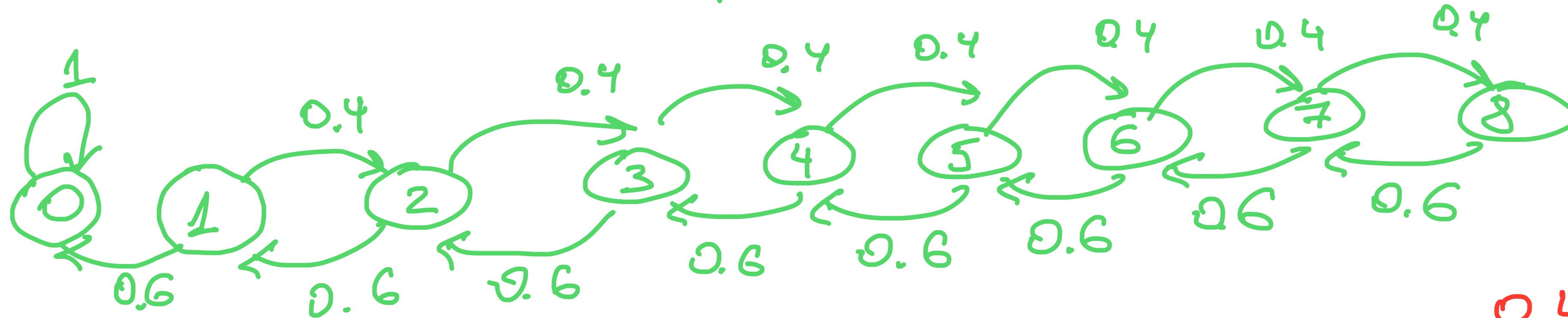
$$\pi_j = \frac{C_N^j}{2^N}.$$

Стационарное состояние единственно, так как решение системы линейных уравнений выше — единственно.

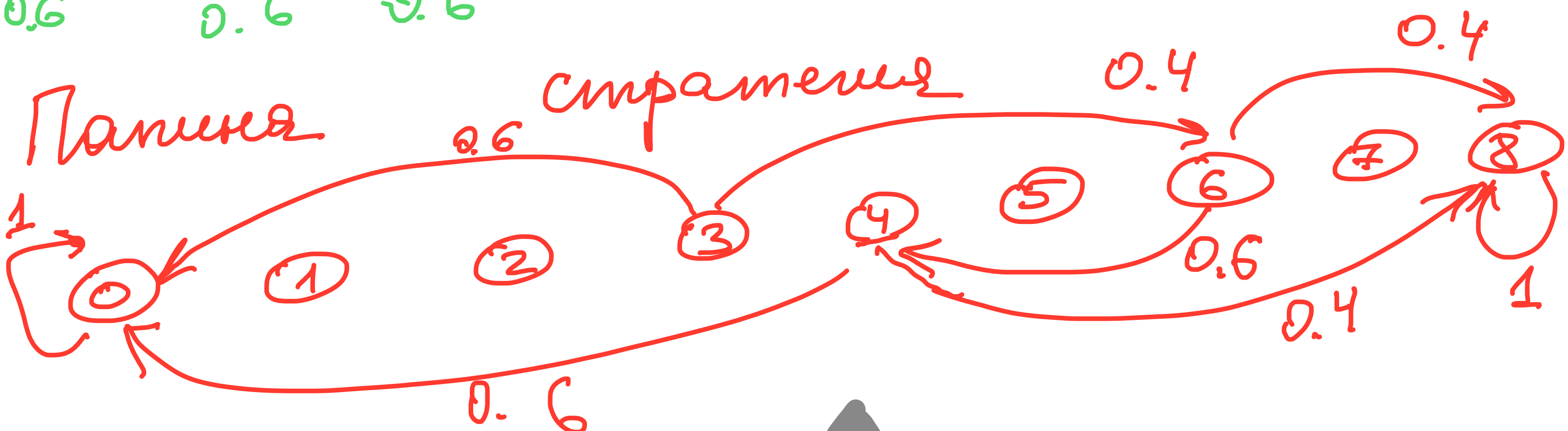
3) Нет. Если бы МПВ перемешивала, то существовало бы такое k, что переходные вероятности $p_{ij}^{(k)}$ за k шагов положительны для любых i, j. Однако, $p_{00}^{(k)}$ может быть положительно лишь в том случае, если k — четно, а $p_{01}^{(k)}$ может быть положительно лишь в случае, когда k — нечетно (смотри на граф цепи!)

4) Нет. Если бы МЦ была бы эргодична, то переходные вероятности $p_{ij}^{(k)}$ сходились бы при $k \to \infty$ к компонентам стационарного состояния π_j, независимо от i. Но $p_{00}^{(k)}$ может быть положительно лишь в том случае, если k — четно, и поэтому не может сходиться к $\pi_0 = 2^{-N}$ (на самом деле, здесь распределение в определенном смысле таки приближается к π, но сходиться не может).

Мамина стратегия



Папина стратегия



Задача 3.2

Задача 5.4