

Семинар 7

Характеры. Тензорное произведение как бумеранг (по книге Павла Изумрудова "Тензор напряженности", Москва, ОГИЗ, 1931)

1. Пусть $\chi_T(g)$ – характер комплексного представления T конечной группы G . Докажите, что характеры обладают следующими свойствами:

а) $\chi_T(g) = \chi_T(hgh^{-1}), \forall g, h \in G$;

б) $\chi_T(1) = \dim T$;

в) $\chi_T(g^{-1}) = \overline{\chi_T(g)}$;

г) $\chi_{T \oplus S} = \chi_T + \chi_S$;

д) $\chi_{T^*}(g) = \overline{\chi_T(g^{-1})}$ для двойственного представления T^* .

2. Пусть $T_k, k = 1, \dots, s$ – все неприводимые представления группы G и χ_k их характеры. Для любого $g \in G$ вычислить сумму $\sum_{k=1}^s \dim T_k \chi_k(g)$.

3. Сохраним обозначения второй задачи. Через C_k обозначим классы сопряженных элементов группы G . Доказать, что $\sum_{k=1}^s \chi_k(C_j) \overline{\chi_k(C_i)} = |G|/|C_j| \delta_{ij}$.

4. Доказать, что $|\chi_T(g)| \leq \dim T$, и если для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство, то этот элемент лежит в ядре представления T .

5. Составить таблицу характеров группы, заданной образующими i, j и определяющими соотношениями $i^2 = j^2 = (ij)^2$.

6. Доказать, что $U^* \otimes V^* = (U \otimes V)^*$ (равно означает канонически изоморфно).

7. Доказать, что $U^* \otimes V = \text{Hom}(U, V)$.

8. Доказать, что $(U \oplus V) \otimes W = (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$.